

Э. М. СААК

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВМЕСТЕ С ПРОИЗВОДНЫМИ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком И. П. Векуа 24 IV 1972)

Рассматривается область Ω в n -мерном евклидовом пространстве R^n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 1. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения

$$Au \equiv \sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} = 0 \quad (1)$$

порядка $2m$ с постоянными коэффициентами $a_{\mu\nu}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$, устойчива в области Ω , если внутри области Ω устойчива задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Что касается последнего вопроса, то он полностью решен М. В. Келдышем ((¹); (²), стр. 411—414).

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим гильбертовы пространства H_t , $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, описанные в (³), стр. 173. Через $H_t(\Omega, \Delta)$ (Ω — ограниченная область, лежащая внутри куба $0 < x_i < 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, n$) обозначается подпространство пространства H_t , состоящее из гармонических в области Ω функций.

Будем говорить, что в пространстве $H_t(\Omega, \Delta)$ возможна регулярная аппроксимация, если $H_t(\bar{\Omega}, \Delta) = H_t(\Omega, \Delta)$, где $H_t(\bar{\Omega}, \Delta)$ есть замыкание в H_t множества функций, гармонических в окрестности замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Лемма 1. Для возможности регулярной аппроксимации в $H_t(\Omega, \Delta)$ необходимо и достаточно, чтобы задача Дирихле была устойчива внутри области Ω .

Доказательство. Равносильное утверждение фактически установлено в (⁴).

Лемма 2. Если регулярная аппроксимация возможна в $H_1(\Omega, \Delta)$, то она возможна и в $H_0(\Omega, \Delta)$.

Доказательство. Оператор $(1 - \Delta)$, где Δ — оператор Лапласа, изоморфно отображает пространство $H_1(\Omega, \Delta)$ на $H_{-1}(\Omega, \Delta)$ ((³), стр. 174). Поэтому в пространстве $H_{-1}(\Omega, \Delta)$ также возможна регулярная аппроксимация. Пространства $H_t(\Omega, \Delta)$, $t = 0, \pm 1$, можно соединить гильбертовой шкалой. Это же относится и к пространствам $H_t(\bar{\Omega}, \Delta)$, $t = 0, \pm 1$. Тожественный оператор отображает $H_{\pm 1}(\Omega, \Delta)$ на $H_{\pm 1}(\bar{\Omega}, \Delta)$ и в силу интерполяционной теоремы он отображает $H_0(\Omega, \Delta)$ на $H_0(\bar{\Omega}, \Delta)$, что и утверждалось.

Лемма 3. Если в $H_1(\Omega, \Delta)$ возможна регулярная аппроксимация, то она возможна и в $H_t(\Omega, \Delta)$ при любом $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Доказательство. При $t = 0$ это доказано выше. Но любое $H_t(\Omega, \Delta)$ изоморфно отображается оператором $(1 - \Delta)^{[t/2]}$ либо на $H_0(\Omega, \Delta)$, либо на $H_1(\Omega, \Delta)$ (определение оператора $(1 - \Delta)^t$ для $t < 0$ см. (³), стр. 174), что и доказывает лемму.

Через $H_t(\Omega, A)$ будем обозначать подпространство пространства H_t , состоящее из функций, удовлетворяющих уравнению (1) в области Ω . Понятие возможности регулярной аппроксимации в $H_t(\Omega, A)$ определяется по аналогии с $H_t(\Omega, \Delta)$.

Лемма 4. Если в пространстве $H_1(\Omega, \Delta)$ возможна регулярная аппроксимация, то она возможна и в $H_m(\Omega, \Delta^{(m)})$, $m = 1, 2, 3, \dots$, где $\Delta^{(m)}$ — m -я итерация оператора Лапласа.

Доказательство. Какова бы ни была область Ω , оператор Δ^{m-1} гомоморфно отображает $H_m(\Omega, \Delta^{(m)})$ на $H_{m-1}(\Omega, \Delta)$. При этом ядро гомоморфизма состоит из $(m-1)$ -гармонических функций в кубе $0 < x_i < 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому лемма 4 следует из леммы 3.

Лемма 5. Если в пространстве $H_1(\Omega, \Delta)$ возможна регулярная аппроксимация, то она возможна и в $H_m(\Omega, A)$.

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство $W_2^{(m)}$ вещественных функций $u(x)$, $v(x)$, имеющих в R^n производные в смысле С. Л. Соболева до m -го порядка и равных нулю вне куба $0 < x_i < 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, n$, со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle^{(m)} = \int_{R^n} \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^m v(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx. \quad (2)$$

Через $W_2^{(m)}(\Omega, A)$ обозначим его подпространство, состоящее из функций, удовлетворяющих уравнению (1) в области Ω . Возможность регулярной аппроксимации в $W_2^{(m)}(\Omega, A)$ определим по аналогии с $H_m(\Omega, A)$. Можно показать, что регулярная аппроксимация в пространствах $W_2^{(m)}(\Omega, A)$ и $H_m(\Omega, A)$ возможна или нет одновременно. Поэтому из условия и леммы 4 вытекает, что регулярная аппроксимация возможна в $W_2^{(m)}(\Omega, \Delta^{(m)})$. Покажем, что отсюда следует возможность регулярной аппроксимации в $W_2^{(m)}(\Omega, A)$.

Коэффициенты оператора A без ограничения общности можно считать симметричными:

$$a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Рассмотрим билинейный функционал

$$\langle u, v \rangle^{(A)} = \int_{R^n} \sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{|\mu|} u(x)}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_n^{\mu_n}} \frac{\partial^{|\nu|} v(x)}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} dx. \quad (4)$$

В силу (3) этот функционал симметричен и, следовательно, его можно принять за новое скалярное произведение в $W_2^{(m)}$. В силу эллиптичности оператора A , норма, порождаемая скалярным произведением (4), эквивалентна норме, порождаемой скалярным произведением (2). Таким образом, оператор A порождает автоморфизм в пространстве $W_2^{(m)}$, который мы будем обозначать через $\tilde{A}$:

$$\langle \tilde{A}u, v \rangle^{(m)} = \langle u, v \rangle^{(A)}, \quad u, v \in W_2^{(m)}. \quad (5)$$

Можно показать, что $\tilde{A}$ — образ пространства $W_2^{(m)}(\Omega, A)$ совпадает с $W_2^{(m)}(\Omega, \Delta^{(m)})$ для любой области Ω , лежащей в кубе $0 < x_i < 2\pi$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому из возможности регулярной аппроксимации в $W_2^{(m)}(\Omega, A)$, а значит, и в $H_m(\Omega, A)$.

Лемма 6. Если регулярная аппроксимация возможна в $H_m(\Omega, A)$, то она возможна и в $H_t(\Omega, A)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Доказательство. Для $A = \Delta^m$ это доказывается по аналогии с леммой 3. В общем случае используем то обстоятельство, что оператор $\tilde{A}$, определенный соотношением (5), осуществляет непрерывный автоморфизм не

только в $W_2^{(m)}$, но также и в $W_2^{(\mu)}$, $\mu \geq m$. Это позволяет доказать, что из возможности регулярной аппроксимации в $W_2^{(\mu)}$ $(\Omega, \Delta^m) = W_2^{(\mu)} \cap \cap W_2^{(m)}(\Omega, \Delta^m)$ следует аналогичная возможность для $W_2^{(\mu)}(\Omega, A) = = W_2^{(\mu)} \cap W_2^{(m)}(\Omega, A)$. Далее рассматриваем оператор $(1-A)^\tau$, изоморфно переводящий H_μ на H_t при некоторых $\tau > 0$ и $\mu \geq m$, а также $H_\mu(\Omega, A)$ на $H_t(\Omega, A)$. Это позволяет доказать, что регулярная аппроксимация возможна также и в $H_t(\Omega, A)$, $t < m$. Лемма доказана.

Сопоставляя леммы 5 и 6, приходим к следующему выводу.

Лемма 7. Если регулярная аппроксимация возможна в $H_1(\Omega, \Delta)$, то она возможна и в $H_t(\Omega, A)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Приступим к доказательству теоремы 1. Если $f \in W_2^{(m)}$, то решение $u_{f, \Omega}^{(A)} \in W_2^{(m)}(\Omega, A)$ задачи Дирихле для уравнения (1) в области Ω при граничном условии $f(x)$ допускает представление $(4, 5)$:

$$u_{f, \Omega}^{(A)}(x) = \langle f(y), \mathcal{P}_{\Omega}^{(A)}(x, y) \rangle^{(A)}, \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

где $\mathcal{P}_{\Omega}^{(A)}(x, y)$ — воспроизводящая функция пространства $W_2^{(m)}(\Omega, A)$, определяемая соотношениями

1) $u(x) = \langle u(y), \mathcal{P}_{\Omega}^{(A)}(x, y) \rangle^{(A)}$, $x \in \Omega$, для произвольной функции $u \in W_2^{(m)}(\Omega, A)$;

2) $\mathcal{P}_{\Omega}^{(A)}(x, y) \in W_2^{(m)}(\Omega, A)$ как функция от y .

Если $\{\Omega_k\}$ — убывающая последовательность областей, сходящаяся к Ω в том смысле, что $\cap \Omega_k = \bar{\Omega}$, то, используя леммы 1 и 7, можно доказать, что из условия теоремы 1 вытекает сходимость функций $\mathcal{P}_{\Omega_k}^{(A)}(x, y)$ и $\mathcal{P}_{\Omega}^{(A)}(x, y)$ как функций от y в пространстве $W_2^{(m)}$. Из (6) вытекает теперь, что

$$\lim_{\Omega_k \rightarrow \Omega} u_{f, \Omega_k}(x) = u_{f, \Omega}^{(A)}(x), \quad x \in \Omega.$$

Это и означает, что задача Дирихле для уравнения (1) устойчива в Ω .

Теорема 2. Для возможности регулярной аппроксимации в пространстве $W_2^{(t)}(\Omega, A)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы задача Дирихле для уравнения Лапласа была устойчива внутри области Ω .

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило
3 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. В. Келдыш, УМН, 8, 171 (1944). ² Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, М., 1966. ³ Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения с частными производными, М., 1966. ⁴ Э. М. Саак, ДАН, 195, № 3, 564 (1970). ⁵ Э. М. Саак, ДАН, 198, № 4, 772 (1971).