Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 2

УДК 519. 53 МАТЕМАТИКА

Э. Р. СМОЛЬЯКОВ

РЕШЕНИЕ ИГР С ЗАВИСИМЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ИГРОКОВ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 12 IV 1972)

Работа является продолжением работы ([1]) и близко примыкает к работам ([2-8]), все обозначения такие же, как в ([1]).

Рассматривается следующая дифференциальная игра: пусть игрок u минимизирует, а игрок v — максимизирует функционал

$$J=\int_{t_0}^{T} f_0(y,\ u,\ v,\ t)\,dt+\Phi(y^0,\ t_0,\ y^T,\ T) \tag{1}$$

при связях

$$\dot{y}_i=f_i(y,\ u,\ v,\ t),\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

$$g_j(y,\ u,\ v,\ t)\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ldots,q, \tag{3}$$

$$\theta(y,t)\geqslant 0, \tag{4}$$

$$G_k(y^0,\ t_0,\ y^T,\ T)=0,\quad k=1,\ 2,\ldots,\ p, \tag{5}$$

где $y^0=y(t_0)$, $y^T=y(T)$; $u(t)=\{u^1(t),\ldots,u^m(t)\}$ — управление игрока u, $v(t)=\{v^1(t),\ldots,v^r(t)\}$ — управление игрока v; t_0 и T могут быть не фиксированными.

Пусть $d^h\theta/dt^h\equiv g_0(y,\ u,\ v,\ t)$ — наименьшая производная, содержащая хотя бы одну компоненту вектора $\{u, v\}$. Будем предполагать выполненными те же допущения, что и в работе ([1]). В общем случае игры вида (1)—(5) не имеют решения в смысле седловой точки ни в каком классе стратегий, но могут иметь смысл как игры с некоторой дискриминацией игроков ([1]).

Замечание 1. Игры с дискриминацией типа I) и III) из ([1]) могут иметь смысл не при любом поведении первого игрока u, а только при таком, при котором у второго игрока v найдется хотя бы одна мера ψ такая, что носитель P меры $(\psi\varphi)$ содержится в D. Цель игрока u — найти такую меру φ, чтобы

1) $P_v\subseteq\bigcap\limits_{u\in P_u} D_u\neq\varnothing$,

2) $\sup\limits_{\bar\psi} J'(\bar\psi,\ \varphi)=\inf\limits_{\bar\varphi}\sup\limits_{\bar\psi} J'(\bar\psi,\ \bar\varphi)=\bar J$,

где мера ψ определена на подмножествах пространства $\{v\}$; J' — плата обобщенной игры ([6]); P_u — носитель меры φ; $D_u=\{v\}\cap D$; D — это пересечение подпространства $\{u,\ v\}$ пространства $\{y,\ u,\ v,\ t\}$ с множеством, определяемым условиями (3), (4).

Замечание 2. Число $\bar J$ в играх типа I) и III) не превосходит числа $\bar J$ в играх типа II). Утверждение следует из того, что увеличение информации о поведении игрока u не может ухудшить для игрока v значения платы J.

З а м е ч а н и е 3. Если игра имеет решение в смысле седловой точки, то ни информация о функции распределения противника, ни право выбора стратегии первым не могут дать ни одному из игроков никакого преимущества.

З а м е ч а н и е 4. Если задача типа II) из ([1]) имеет решение и, кроме того, имеет решение одна из задач типа I) или III), то игроку, определяющему свое поведение первым, следует применять стратегию, соответствующую игре типа II); в противном случае он рискует получить значение платы J, худшее, чем в игре типа II) (см. примеры 2, 3).

З а м е ч а н и е 5. Если пространства $\{u\}$ и $\{v\}$ одномерны или если D — многомерный интервал, то игры типа I) и III) совпадают между собой.

Л е м м а 1. *В игре типа* I) *из замечания* 3 *работы* ([1]) *носитель P меры* ($\psi\varphi$) *всегда является подмножеством некоторого множества W в* $(m+r)$*-мерном пространстве* $\{u, v\}$, *причем* $P \subset W \subset D \subset \{u, v\}$. *В игре типа* II) *$P$ может быть произвольным* ($\psi\varphi$)*-измеримым подмножеством множества* D, а в игре типа III) $P = P_v \times P_u$, *где* $P_v \subseteq \bigcap\limits_{u \in P_u} D_u$.

Следующие леммы 2—6 сформулированы для игр типа I), определенных в замечании 3 из ([1]), но они почти дословно перефразируются для любых игр, рассмотренных в ([1]); причем они справедливы почти при всех тех t, при которых выполняются их условия.

Л е м м а 2. *Если мера φ_i не равна нулю в точках u_0^i и u_1^i, то необходимо выполняется i-е условие* (13) *из* ([1]) *при* $\bar{u}_0^i = u_0^i$, $\bar{u}_1^i = u_1^i$. *Если же мера φ_i сосредоточена в точках* $\bar{u}_\alpha^i \in [u_0^i, u_1^i]$, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $s \geqslant 2$, *то для каждой пары точек $\bar{u}_\alpha^i$ справедливо i-е условие* (13), *в котором роли точек $\bar{u}_0^i$ и $\bar{u}_1^i$ играют точки $\bar{u}_\alpha^i$.*

Л е м м а 3. *Если i-е условие* (13) *из* ([1]) *не выполняется при* $\bar{u}_0^i = u_0^i$, $\bar{u}_1^i = u_1^i$, *то оптимальная мера φ_i сосредоточена в интервале* (u_0^i, u_1^i) *или φ_i — мера только одной из границ его замыкания на нуль. Более того, если i-е условие в* (13) *не выполняется ни для какой пары точек* $\bar{u}_0^i, \bar{u}_1^i \in [u_0^i, u_1^i]$, *то мера φ_i сосредоточена или только в одной точке замкнутого интервала* $[u_0^i, u_1^i]$, *или имеется по крайней мере один такой интервал* $(\hat{u}_0^i, \hat{u}_1^i] \subset [u_0^i, u_1^i]$, *на котором мера φ_i непрерывна (не обязательно имеет плотность по отношению к мере Лебега) и не равна нулю.*

Л е м м а 4. *Если оптимальная мера φ_i непрерывна и не равна нулю на некотором интервале* $(\bar{u}_0^i, \bar{u}_1^i) \subset [u_0^i, u_1^i]$, *то на этом интервале необходимо удовлетворяется i-е условие в* (14) *из* ([1]).

Л е м м а 5. *Если оптимальная мера φ_i сосредоточена только в одной точке* $\bar{u}^i \in [u_0^i, u_1^i]$, *в этом случае необходимо удовлетворяется соответствующее условие в* (14) *при* $u^i = \bar{u}^i$. *Если мера* ($\psi\varphi$) *сосредоточена в одной точке* $\{\bar{u}, \bar{v}\} \in D$, *то необходимо удовлетворяются все условия* (14) *из* ([1]) *при* $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$.

Л е м м а 6. *Если i-е условие в* (14) *из* ([1]) *не удовлетворяется ни на каком полуинтервале* $[\bar{u}_0^i, \bar{u}_1^i) \subset [u_0^i, u_1^i]$, *то мера φ_i не может быть непрерывной не равной нулю ни на каком подынтервале интервала* $[u_0^i, u_1^i]$ *(она в этом случае является дискретной).*

П р и м е р 1. Найти решение дифференциальной игры, в которой уравнение имеет разрывную правую часть

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} y + v - u + uv, & \text{если } v < u, \\ y, & \text{если } v = u, \\ y + v - u - uv, & \text{если } v > u, \end{cases} \tag{6}$$

D: $\{u \in U = [0, 1];\ v \in V = [0, 1]\}$, $t \in (0, T)$, T — фиксировано, $T > 0$.

Уравнение (6), согласно ([9, 10]), имеет единственное абсолютно непрерывное решение при любом $y(0)$; положим $y(0) = 1$. Пусть игрок u минимизирует, а игрок v — максимизирует $y(T)$. Так как D — двумерный интервал, можно искать решение в смысле седловой точки. Из уравнений (7), (10) из ([1]) имеем $\dot{\lambda} = -\lambda$, $\lambda(T) = -1$, откуда $\lambda(t) = -e^{-(t-T)} < 0$. Простые, но довольно громоздкие выкладки показывают, что ни одно из уравнений (13), (14) из ([1]) при условии нормировки мер не имеет решений, за исключением случая, когда меры φ и ψ абсолютно непрерывны на некоторых интервалах вида $(u_0, 1)$ и $(v_0, 1)$ соответственно; в этом случае они должны удовлетворять уравнениям (14) из ([1]):

$$\left[\int_{v_0}^{u-0} (v - u + uv)\, d\psi + \int_{u+0}^{1+0} (v - u - uv)\, d\psi\right]'_u = 0, \tag{7}$$

$$\left[\int_{u_0}^{v-0} (v - u - uv)\, d\varphi + \int_{v+0}^{1+0} (v - u + uv)\, d\varphi\right]'_v = 0. \tag{8}$$

Уравнения симметричны, поэтому можно решить лишь одно из них, например, первое. Дифференцируя (7) по u, получим уравнение $v^2\ddot{\psi} + 3v\dot{\psi} = 0$, которое при условии (7) и условии нормировки имеет единственное решение

$$\psi(v, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } v \leqslant {}^1/_3, \\ {}^1/_8(9 - v^{-2}) & \text{при } {}^1/_3 \leqslant v \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } v \geqslant 1. \end{cases}$$

Вследствие симметрии уравнений (7) и (8) аналогичный вид имеет и функция распределения $\varphi(u, t)$. Так как чистые граничные стратегии, очевидно, не являются оптимальными, то единственным оптимальным поведением в игре (6) является только поведение, характеризуемое абсолютно непрерывными функциями распределения φ и ψ найденного вида. Цена игры равна e^T.

Пример 2 (игра с дискриминацией типа I) или III)). Игрок u стремится получить минимум функции $J(u, v) = (v - u)^2$, а игрок v — максимум, причем область D имеет вид

$$D = \{u, v \mid g_1 \equiv 2v - u \geqslant 0,\ g_2 \equiv 2 - 2v - u \geqslant 0,\ g_3 \equiv u \geqslant 0\}.$$

Из решения игры, приведенной в ([6]), следует, что носитель P оптимальной ($\psi\varphi$)-меры вспомогательной игры на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ не содержится в D (см. ([1])); следовательно, поставленная игра может иметь решение только в смысле «доминирующего» значения платы. Пусть игрок u определяет свое поведение первым (причем ему известно, что игрок v знает только его функцию распределения, но не знает реализации случайных чисел u). Тогда он гарантирует себе значение платы J, равное $\varepsilon > 0$, если будет определять свое поведение функцией

$$\varphi_\varepsilon(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u < {}^1/_2(1 \pm \sqrt{1 - (1 - 4\varepsilon)/\beta}), \\ \beta & \text{при} \quad {}^1/_2(1 \pm \sqrt{1 - (1 - 4\varepsilon)/\beta}) \leqslant u < 1, \\ 1 & \text{при} \quad u \geqslant 1, \end{cases} \tag{9}$$

где $(1 - 4\varepsilon) \leqslant \beta < 1$. У игрока v, знающего функцию $\varphi_\varepsilon(u)$, нет выбора: он должен выбирать только число $v = {}^1/_2$ с вероятностью 1. Игрок u может выбором ε сделать плату сколь угодно малой: $\min\limits_{\varphi_\varepsilon} \max\limits_{\psi} J' = \varepsilon > \inf\limits_{\varphi} \max\limits_{\psi} J' = 0$.

Из решения следующего примера видно, что указанное поведение игрока u не будет оптимальным, если игрок v знает реализацию случайных чисел игрока u.

Пример 3 (игра с дискриминацией типа II). Рассмотрим предыдущий пример в предположении, что игроку v, определяющему свое поведение вторым, известна реализация случайных чисел противника. Найдем, при каких $u \in (0, 1)$ может существовать более одной точки с положительной мерой ψ. Очевидно, в таких точках (пусть это будут точки $\bar{v}_0(u)$ и $\bar{v}_1(u)$) должно удовлетворяться последнее уравнение (15) из ([1]), которое с учетом того, что в случае смешанной стратегии должно быть $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ (что следует из уравнения (8) из ([1])), примет вид: $[(v-u)^2]_{\bar{v}_0(u)}^{\bar{v}_1(u)} = 0$. Последнее уравнение имеет решение только при $u = 1/2$ (т. е. при $\bar{v}_0(1/2) = v_0(1/2) = 1/4$, $\bar{v}_1(1/2) = v_1(1/2) = 3/4$).

Из уравнения (16) из ([1]) следует, что при любых u мера ψ не может быть непрерывной, не равной нулю. Следовательно, при $u \neq 1/2$ мера ψ определяет на $[v_0(u), v_1(u)]$ чистую стратегию, а при $u = 1/2$ она сосредоточена в точках $v_0(1/2)$ и $v_1(1/2)$. Это значит, что при $u = 1/2$ функция $L_u = \int\limits_{v_0(u)}^{v_1(u)} J(u, v)\, d\psi$ может иметь разрыв или не быть дифференцируемой.

Определим теперь поведение игрока u. Можно проверить, что первое уравнение в (15) из ([1]) не может удовлетворяться ни при каких $\bar{u}_0, \bar{u}_1 \neq 1/2$, $\bar{u}_0 \neq \bar{u}_1$. Кроме того, первое уравнение в (16) из ([1]) не может удовлетворяться тождественно по u ни на каких подынтервалах интервалов $(0, 1/2)$, $(1/2, 1)$. Согласно леммам 3 и 6, отсюда следует, что оптимальной для игрока u может быть только чистая стратегия. Но во всех точках дифференцируемости функции L_u уравнение (16) не удовлетворяется, значит, оптимальным является число $u = 1/2$ (в этой точке L_u не имеет производной). Цена игры равна $\bar{J}_1 = \min\limits_{\varphi} \max\limits_{\psi} J = 1/16$, причем ψ — мера точек $v_0(1/2)$ и $v_1(1/2)$ — может быть любой, удовлетворяющей лишь условию

$$\int\limits_{v_0(1/2)}^{v_1(1/2)} d\psi = 1.$$

Обращаясь к примеру 2, легко можно подсчитать, что если бы в этом примере игрок v знал реализацию случайных чисел игрока u, а игрок u не знал бы об этом и определял свое поведение функцией (9), то, взяв

$$\psi(v)|_{u=1/2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad v < 1/4, \\ p & \text{при} \quad 1/4 \leqslant v < 3/4, \ 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 1 & \text{при} \quad v \geqslant 3/4, \end{cases}$$

$$\psi(v)|_{u=1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad v < 1/2, \\ 1 & \text{при} \quad v \geqslant 1/2, \end{cases}$$

он обеспечил бы значение платы J, равное $\bar{J}_2$:

$$\bar{J}_2 = \min_{\varphi_\varepsilon} \max_{\psi} J = 1/16\,(1 + 3\varepsilon) > \bar{J}_1 > \varepsilon.$$

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Р. Смольяков, ДАН, 208, № 1 (1972). [2] Н. Н. Красовский, ДАН, 193, № 2, 284 (1970). [3] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, 196, № 2 (1971). [4] Ю. С. Осипов, Задачи теории дифференциально разностных игр, Докторская диссертация, ЛГУ, 1971. [5] А. И. Сотсков, Кибернетика, № 4 (1969). [6] Э. Р. Смольяков, ДАН, 191, № 1, 39 (1970). [7] Р. П. Федоренко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 5 (1970). [8] Ю. Н. Желнин, ДАН, 199, № 1, 44 (1971). [9] Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференц. уравнения, 2, М., 1954. [10] Э. Камке, Интеграл Лебега — Стилтьеса, М., 1959.