Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 2

УДК 518.61 *МАТЕМАТИКА*

А. В. СОКОЛОВ

О СОВПАДЕНИИ СПЕКТРА СЕМЕЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРОМ ЭТОГО СПЕКТРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 IV 1972)

В связи с исследованием устойчивости несамосопряженных разностных краевых задач в ([1, 2]) введено понятие спектра семейства $\{R_N\}$ линейных операторов R_N, $N=N_1, N_1+1, \ldots$, действующих в $(N+1)$-мерных нормированных пространствах U_N. Там же указан алгоритм вычисления спектра семейства операторов на отрезке в равномерной метрике. В ([3]) показано, что спектр семейства $\{R_N\}$ зависит, вообще говоря, от выбора норм $\|u\|_{U_N}$ и введено понятие ядра спектра, инвариантного относительно выбора норм из широкого класса так называемых разностных норм. Однако способ вычисления ядра оставался неизвестным. В предлагаемой заметке показано, что для семейств операторов, возникающих из произвольных явных разностных схем с постоянными коэффициентами на отрезке, ядро спектра совпадает со всем спектром, вычисленным в случае равномерной нормы. Отсюда вытекает способ вычисления инвариантного ядра, а также то, что спектр семейства операторов, вычисленный в равномерной метрике, содержится в спектре, вычисленном при любом другом выборе норм из числа разностных норм в пространствах U_N.

Определение 1 ([2]). Точка λ называется точкой резольвентного множества семейства операторов $\{R_N\}$, если существуют $\varepsilon>0$ и N_0 такие, что при $N>N_0$ для любого $u\in U_N$ выполнено неравенство $\|R_Nu-\lambda u\|>\varepsilon\|u\|$. Точками спектра называются те точки λ, которые не являются резольвентными.

Определение 2 ([3]). Арифметическим ядром спектра семейства операторов $\{R_N\}$ называется множество

$$\Lambda'=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N_0=N_1}^{\infty}\overline{\bigcup_{N=N_0}^{\infty}\Lambda_{k,N}},$$

где $\Lambda_{k,N}$ — множество всех комплексных чисел λ, для которых существует решение $u\in U_N$ неравенства

$$\|R_Nu-\lambda u\|<\frac{1}{N^k}\|u\|. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть $\{R_N\}$ — семейство разностных операторов R_N, $v=R_Nu$, $u, v\in U_N$, $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N}|u_n|$, заданных формулами:*

$$v_n=\sum_{k=-r}^{s}a_ku_{k+n},\qquad n=r,\ldots,N-s,$$

где $r, s\geqslant 0$ и если $r\neq 0$, то $a_{-r}\neq 0$; если $s\neq 0$, то $a_s\neq 0$;

$$v_n=\sum_{k=0}^{k_1}b_{n,k},u_k,\qquad n=0,\ldots,r-1$$

(условие на левой границе);

$$v_n = \sum_{k=0}^{k_2} c_{n-N+s,\,k} u_{N-k_2+k}, \quad n = N - s + 1, \ldots, N$$

(условие на правой границе).

Тогда спектр Λ семейства $\{R_N\}$ разностных операторов совпадает с арифметическим ядром Λ' этого спектра.

Известно [1], что спектр семейства операторов в нашем случае может быть найден с помощью процедуры исследования устойчивости, указанной К. И. Бабенко и И. М. Гельфандом. А именно, спектр состоит из точек линии Γ, которую пробегают точки λ, $\lambda = \sum_{k=-r}^{s} a_k q^k$, когда комплексная переменная q пробегает единичную окружность, из конечной совокупности изолированных точек и из двумерных образований («пленок»), заполняющих некоторые из односвязных областей, ограниченных отрезками линии Γ.

Главную трудность представляет доказательство принадлежности ядру Λ' тех точек $\lambda \in \Gamma$, в достаточно малой окрестности $O\lambda$ которых нет точек $\lambda \notin \Gamma$, принадлежащих спектру Λ. В данной теореме доказывается, что для каждой из таких точек $\lambda \in \Gamma$, за исключением, быть может, конечного числа их, существует сколь угодно малая окрестность $O\lambda$, удовлетворяющая следующим свойствам (такие точки λ будем называть регулярными):

1) в пределах $O\lambda$ существуют обратные однозначные аналитические функции $q_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, m$, $m = r + s$, такие, что $q_i'(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in O\lambda$;

2) линия Γ разделяет $O\lambda$ на две связные непересекающиеся области A и B;

3) существует натуральное число p такое, что при соответствующем выборе ветвей $q_i(\lambda)$ и соответствующей их нумерации будет:

a) $|q_i(\lambda)| \leqslant r_1 < 1, \quad \lambda \in O\lambda, \quad i = 1, \ldots, r - p;$

b) $|q_i(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in A$, $\quad |q_i(\lambda)| = 1$ при $\lambda \in \Gamma \cap O\lambda$,
$|q_i(\lambda)| > 1$ при $\lambda \in B$, $\quad i = r - p + 1, \ldots, r;$

c) $|q_i(\lambda)| > 1$ при $\lambda \in A$, $\quad |q_i(\lambda)| = 1$ при $\lambda \in \Gamma \cap O\lambda$,
$|q_i(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in B$, $\quad i = r + 1, \ldots, r + p;$

d) $|q_i(\lambda)| \geqslant r_2 > 1, \quad \lambda \in O\lambda, \quad i = r + p + 1, \ldots, m.$

В дальнейшем мы будем пользоваться этой нумерацией ветвей $q_i(\lambda)$.

Идея доказательства неравенства (1) для регулярных точек λ_0 состоит в следующем. Ищется решение $u(\lambda)$ этого неравенства в окрестности $O\lambda_0$ точки λ_0 в виде

$$u_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{r-p} \alpha_k q_k^n(\lambda) + \sum_{k=r-p+1}^{r+p} \alpha_k q_k^n(\lambda) + \sum_{k=r+p+1}^{m} \alpha_k q_k^n(\lambda), \tag{2}$$

$n = 0, \ldots, N$, где α_k — произвольные коэффициенты, хотя бы один из которых отличен от нуля.

Для $n = r, \ldots, N - s$ u_n из (2) есть точное решение уравнения $(R_N u - \lambda u)_n = 0$. Для значений на левом конце отрезка ($n = 0, \ldots, r - 1$) третье слагаемое из (2) экспоненциально убывает с ростом N. Теперь постараемся за счет выбора значений α_k, $k = 1, \ldots, r + p$, сделать сумму первых двух слагаемых из (2) на левом конце либо равной нулю, либо по крайней мере тоже экспоненциально убывающей с ростом N. За счет того, что неизвестных α_k больше (их $r + p$ штук), чем получающихся для их нахождения уравнений (их r штук), мы почти для каждого $\lambda \in O\lambda_0$ можем этого добиться и получить, таким образом, набор значений $\alpha_k^{(1)}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, r + p$. Итак, на левом конце мы можем добиться выполнения неравенства (1) почти для всех $\lambda \in O\lambda_0$.

Поступим аналогичным образом с правым концом отрезка. Здесь у нас первое слагаемое из (2) экспоненциально убывает, а для α_k, $k=r-p+1,\ldots,m$, находим значения $\alpha_k^{(2)}(\lambda)$.

Теперь мы должны добиться согласования найденных порознь коэффициентов $\alpha_k^{(1)}$ и $\alpha_k^{(2)}$ для $k=r-p+1,\ldots,r+p$, т. е. найти такое $\lambda_N\in O\lambda_0$, чтобы было $\alpha_k^{(1)}=\alpha_k^{(2)}$, $k=r-p+1,\ldots,r+p$.

Центральную роль в доказательстве существования такого λ_N играет

Лемма. *Пусть λ_0 — регулярная точка, $O\lambda_0$ — ее произвольная окрестность, в которой существуют и отличны от нуля $q_i(\lambda)$ и $q_i'(\lambda)$, $i=1,\ldots,m$. Пусть, далее,*

$$f(\lambda)=\prod_{i=1}^{p}\frac{q_{r-p+i}(\lambda)}{q_{r+i}(\lambda)},\qquad f_{k,\begin{pmatrix}i_1,i_2,\ldots,i_k\\ j_1,j_2,\ldots,j_k\end{pmatrix}}(\lambda)=\prod_{n=1}^{k}\frac{q_{r-p+i_n}(\lambda)}{q_{r+j_n}(\lambda)},$$

где $k<p$, $0<i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant p$, $0<j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant p$,

$$\Phi_N(\lambda)=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{\begin{pmatrix}i_1,\ldots,i_k\\ j_1,\ldots,j_k\end{pmatrix}}C_{k,\begin{pmatrix}i_1,\ldots,i_k\\ j_1,\ldots,j_k\end{pmatrix}}(\lambda)\,f^N_{k,\begin{pmatrix}i_1,\ldots,i_k\\ j_1,\ldots,j_k\end{pmatrix}}(\lambda),$$

где $C_{k,\begin{pmatrix}i_1,\ldots,i_k\\ j_1,\ldots,j_k\end{pmatrix}}(\lambda)$ — коэффициенты, непрерывные по λ и не зависящие от N, а суммирование во внутренней сумме ведется по всевозможным таблицам описанного типа.

Тогда для достаточно больших N уравнение

$$f^N(\lambda)=\Phi_N(\lambda)\tag{3}$$

имеет в окрестности $O\lambda_0$ решение λ_N с невязкой порядка $\rho^{(N)^{1/16}}$, где $0<\rho<1$, т. е. существуют такие ρ и N_0, что для любого $N>N_0$ существует $\lambda_N\in O\lambda_0$, что

$$|f^N(\lambda_N)-\Phi_N(\lambda_N)|<\rho^{(N)^{1/16}}.\tag{4}$$

Доказательство этой леммы основывается на известной теореме о неподвижной точке при непрерывном отображении односвязного компакта в себя. Воспользоваться этой теоремой для доказательства существования точного решения уравнения (3) не удается. Поэтому мы вводим в уравнение (3) дополнительное экспоненциально убывающее с ростом N слагаемое и переходим к новому уравнению

$$\Psi_N(\lambda)\equiv\left(f^{(N)^{1/2}}(\lambda)-z_N^{(N)^{1/2}}\right)^{(N)^{1/2}}=\Phi_N(\lambda),\tag{5}$$

где z_N — некоторое комплексное число, зависящее от N, но не зависящее от λ. Число z_N подбирается таким образом, чтобы из существования решения уравнения (5) вытекало существование решения неравенства (4).

Для каждого N строятся криволинейные четырехугольники $W_N\ni\lambda_0$, стягивающиеся к λ_0 при $N\to\infty$. Границы W_N специально подбираются таким образом, чтобы функция $\Psi_N(\lambda)$ осуществляла гомеоморфное отображение W_N на некоторую односвязную замкнутую область F_N римановой поверхности, а функция Φ_N — непрерывное отображение W_N внутрь F_N.

При доказательстве включения $F_N=\Psi_N(W_N)\supset\Phi_N(W_N)$ мы используем, в частности, следующее свойство линии Γ и корней $q_i(\lambda)$, доказанное в работе. Пусть переменная q пробегает единичную окружность. Тогда для регулярной точки λ_0 существует натуральное p и такой отрезок $\eta\ni\lambda_0$ линии Γ, который значения функции $\lambda(q)$ пробегают p раз в одном направлении и p раз в противоположном, причем прохождение отрезка η в одном из направлений отвечает ветвям $q_i(\lambda)$ для $i=r-p+1,\ldots,r$, а в противоположном направлении — ветвям $q_i(\lambda)$ для $i=r+1,\ldots,r+p$.

Институт электронных управляющих машин
Москва

Поступило
17 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, Введение в теорию разностных схем, М., 1962. [2] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, УМН, 18, 3, 3 (1963). [3] В. С. Рябенький, ДАН, 185, № 2, 275 (1969).