

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ГАЗЕ ОТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПЛАСТИНКЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 29 IV 1972)

1. Рассмотрим неподвижную пластинку ширины d в неограниченной идеальной сжимаемой среде. Начиная с некоторого момента времени t_0 , по поверхности пластинки распространяется фронт малых возмущений. Бегущая волна деформирует поверхность пластинки, приводя точки поверхности в малые движения. Нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки задана соответственно на верхней и нижней стороне пластинки: $v_n = A_v$ и $v_n = A_n$, где A_v и A_n — функции времени и точек поверхности пластинки — являются малыми величинами.

Будем исследовать плоскопараллельные безвихревые течения газа (¹, ²). Возьмем систему осей координат Oxz , как указано на рис. 1.

Предположим, что фронт малых возмущений на верхней стороне поверхности пластинки (точка C_1) движется по закону

$$x = f_1(t) \quad (1)$$

и на нижней стороне (точка C_2) — по закону

$$x = f_2(t), \quad (2)$$

где f_1 и f_2 — произвольные непрерывные функции времени, причем $|f_1'| > c$, $|f_2'| > c$, где c — скорость звука в невозмущенной среде. Пусть для определенности $|f_1'| \geq |f_2'|$.

Рассмотрим задачу об определении поля скоростей в линейно-акустическом приближении. Потенциал скорости будем искать в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Функция φ_1 и φ_2 удовлетворяют волновому уравнению, условиям: $\varphi_1(x, -z, t) = -\varphi_1(x, z, t)$, $\varphi_2(x, -z, t) = \varphi_2(x, z, t)$ и граничным условиям на оси Ox . Для интервала времени $t_0 < t < f_2^0(-d)$ (f_2^0 — обращение f_2) производные

$$\varphi_{1z} = 0, \quad \varphi_{2z} = 0 \quad \text{при } -d \leq x < f_1(t),$$

$$\varphi_{1z} = \frac{1}{2}A_v(x, t), \quad \varphi_{2z} = \frac{1}{2}A_n(x, t) \quad \text{при } f_1(t) \leq x < f_2(t), \quad (3)$$

$$\varphi_{1z} = \frac{1}{2}[A_v(x, t) + A_n(x, t)], \quad \varphi_{2z} = \frac{1}{2}[A_v(x, t) - A_n(x, t)] \quad \text{при } f_2(t) \leq x \leq 0. \quad (4)$$

Для моментов времени $t \geq f_2^0(-d)$ всюду на отрезке $\overline{AB}$ ($-d \leq x \leq 0$) выполняется условие (4). На оси Ox вне отрезка $\overline{AB}$ в любой момент времени выполняются условия

$$\varphi_1 = 0, \quad (5)$$

$$\varphi_{2z} = 0. \quad (6)$$

Основные задачи в общем случае движущейся пластинки в несжимаемой жидкости поставлены и решены Л. И. Седовым ^(2, 3); задачи с учетом сжимаемости среды, когда пластинка совершает установившиеся колебания, решены М. Д. Хаскиндом ^(4, 5).

2. Введем пространство xzt ⁽⁶⁾. В плоскости xt определим области Σ и Σ' , в которых соответственно заданы условия (3) и (4). Также определим области Σ_1 и Σ'_1 , в каждой из которых заданы условия (5) и (6). Область Σ ограничена отрезком прямой L_2 и кривыми L_3, L_4 (рис. 2). Прямая L_2 параллельна оси времени Ot и отстоит от нее на расстоянии d . Кривые L_3, L_4 изображают соответственно законы (1), (2). Область Σ' ограничена осью времени Ot , прямой L_2 и кривой L_4 . Точка B_1 отвечает границе B

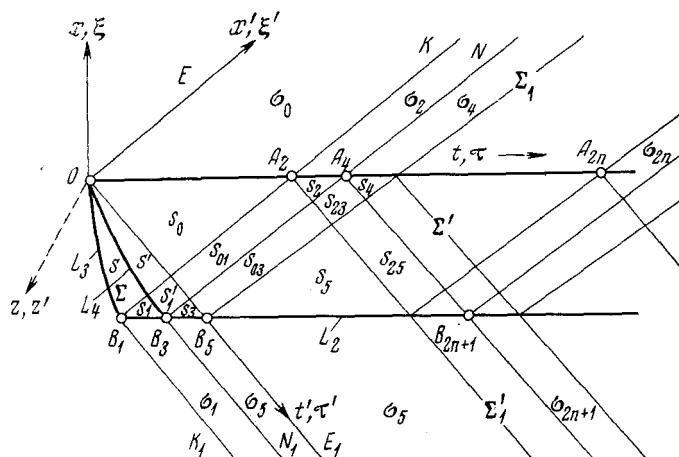


Рис. 2

пластинки в момент времени $t_1 = f_1^0(-d)$, когда фронт, распространяющийся по верхней стороне пластинки, достигает этой границы. Аналогично определяется точка B_3 , отвечающая границе B в момент времени $t_3 = f_2^0(-d)$. Пары прямых OE_1 и OE , B_1K и B_1K_1 , B_3N и B_3N_1 представляют собой линии пересечения плоскости xt с характеристическими поверхностями волнового уравнения. Границами области Σ_1 служат прямая OE и ось Ot , а границами области Σ'_1 — прямые B_1K_1 и L_2 (рис. 2).

Прямые OE_1 , B_1K и B_3N многократно отражаются от границ области Σ' . Наряду с координатами точек O, B_1 и B_3 отметим координаты точек $O(0, t_0 = 0), A_2(0, t_2), A_4(0, t_4), \dots, A_{2n}(0, t_{2n}), \dots, B_1(-d, t_1), B_3(-d, t_3), B_5(-d, t_5), \dots, B_{2n+1}(-d, t_{2n+1}), \dots$. Характеристические конусы с вершинами, расположенными в точках $O, A_2, A_4, \dots, A_{2n}, \dots, B_1, B_3, B_5, \dots, B_{2n+1}, \dots$ разделяют пространство xzt на области с различным аналитическим видом решения задачи. С этой точки зрения область Σ_1 разделяется на области $\sigma_0, \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2n}, \dots$; область Σ'_1 — на области $\sigma'_1, \sigma'_3, \sigma'_5, \dots, \sigma'_{2n+1}, \dots$; область Σ — на s, s_1 и область Σ' разделяется на области $s', s'_1, s_0, s_{01}, s_2, s_3, s_{03}, s_{23}, \dots, s_{2n}, s_{2n+1}, \dots$.

Функции φ_1 и φ_2 являются искомыми функциями внутри области, ограниченной огибающей поверхностью семейства характеристических конусов с вершинами, расположенными на дуге $\overline{OB_1}$ (кривая L_3) и обращенными в сторону возрастающих значений времени. Вне указанной области функции φ_1 и φ_2 тождественно равны нулю.

Представим каждый из потенциалов φ_1 и φ_2 в виде двукратного интеграла, под знаком которого содержится нормальная к плоскости xt производная потенциала (формула (6) статьи ⁽⁶⁾). Используя граничные условия (3), (4) и (6), представим потенциал $\varphi(x, z, t)$ для $z \geq 0$ ($z \rightarrow 0$

при $z > 0$) в виде

$$\varphi^* = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma} A_B^*(\xi', \tau') \frac{d\xi' d\tau'}{r} - K(x', z', t'), \quad (7)$$

$$K = \frac{1}{2\pi} \iint_{\delta} [\varphi_{1z'}^*(\xi', z', \tau')]_{z'=0} \frac{d\xi' d\tau'}{r} + \frac{1}{2\pi} \iint_{\delta'} [\varphi_{1z'}^*(\xi', z', \tau')]_{z'=0} \frac{d\xi' d\tau'}{r},$$

$$r = ((x' - \xi')(t' - \tau') - (z')^2)^{1/2},$$

и для $z \leq 0$ ($z \rightarrow 0$ при $z < 0$) в виде

$$\varphi^* = \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma'} A_H^*(\xi', \tau') \frac{d\xi' d\tau'}{r} + K(x', z', t'). \quad (8)$$

Области $\sigma, \sigma', \delta, \delta'$ представляют собой соответственно части областей $\Sigma + \Sigma', \Sigma', \Sigma_1, \Sigma_1'$, отсекаемые характеристическим конусом с вершиной в точке с координатами x, z, t и обращенным в сторону убывающих значений времени. Переменные x', z', t' связаны с переменными x, z, t соотношениями: $c(x' - t') = 2x$, $cz' = z$, $t' + x' = 2t$. Через $\varphi^*, \varphi_{1z'}, A_B^*, A_H^*$ обозначены функции $\varphi, \varphi_{1z}, A_B, A_H$ в новых переменных.

3. Обозначим неизвестную производную $\varphi_{1z'}$ в областях $\sigma_0, \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2n}, \dots$ через $\theta_0, \theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2n}, \dots$ и в областях $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \dots, \sigma_{2n+1}, \dots$ — через $\theta_1, \theta_3, \theta_5, \dots, \theta_{2n+1}, \dots$. Используя условие (5), построим интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции θ_{2n} и θ_{2n+1} , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, и решим их, применяя метод, предложенный ранее (^{7, 8}).

Решения θ_{2n} и θ_{2n+1} для $n \geq 2$ найдем в виде рекуррентных формул

$$\begin{aligned} \theta_{2n}(\xi', \tau') = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(\xi' - \tau')^{1/2}} \left\{ \int_{\tau' - 2d/c}^{\tau'} \frac{A_B^*(\xi, \tau') + A_H^*(\xi, \tau') (\tau' - \xi)^{1/2}}{2} \frac{d\xi}{\xi' - \xi} + \right. \\ & \left. + \int_{\xi_{2n-1}}^{\tau' - 2d/c} \theta_{2n-1}(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi + \sum_{i=0}^{n-2} \int_{\xi_{2i+1}}^{\xi_{2i+3}} \theta_{2i+1}(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где пределы интегрирования $\xi_1', \xi_3', \xi_5', \dots, \xi_{2n-1}'$ суть координаты точек $B_1, B_3, B_5, \dots, B_{2n-1}$;

$$\begin{aligned} \theta_{2n+1}(\xi', \tau') = & -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(\tau' - \xi' - 2d/c)^{1/2}} \left\{ \int_{\xi'}^{\xi' + 2d/c} \frac{A_B^*(\xi', \tau) + A_H^*(\xi', \tau) (\xi' + 2d/c - \tau)^{1/2}}{2} \frac{d\tau}{\tau' - \tau} + \right. \\ & \left. + \int_{\tau_{2n-4}}^{\xi'} \theta_{2n-4}(\xi', \tau) \frac{(\xi' + 2d/c - \tau)^{1/2}}{\tau' - \tau} d\tau + \sum_{i=0}^{n-3} \int_{\tau_{2i}}^{\tau_{2i+2}} \theta_{2i}(\xi', \tau) \frac{(\xi' + 2d/c - \tau)^{1/2}}{\tau' - \tau} d\tau \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

($\sum$ определена для $n \geq 3$), где пределы интегрирования $\tau_0', \tau_2', \tau_4', \dots, \tau_{2n-4}'$ суть координаты точек $O, A_2, A_4, \dots, A_{2n-4}$.

Решение интегральных уравнений для $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ и θ_3 найдем в виде

$$\begin{aligned} \theta_0(\xi', \tau') = & -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\xi' - \tau')^{1/2}} \left\{ \int_{x_1(\tau')}^{\tau'} A_B^*(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{x_2(\tau')}^{\tau'} A_H^*(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(\xi', \tau') &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\tau' - \xi' - 2d/c)^{1/2}} \int_{\chi_1^0(\xi')}^{\xi' + 2d/c} A_n^*(\xi', \tau) \frac{(\xi' + 2d/c - \tau)^{1/2}}{\tau' - \tau} d\tau, \\ \theta_2(\xi', \tau') &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\xi' - \tau')^{1/2}} \left\{ \int_{\tau' - 2d/c}^{\tau'} A_n^*(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\chi_2(\tau')}^{\tau'} A_n^*(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi \right\} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\xi' - \tau')^{1/2}} \int_{\xi_1'}^{\tau' - 2d/c} \theta_1(\xi, \tau') \frac{(\tau' - \xi)^{1/2}}{\xi' - \xi} d\xi, \\ \theta_3(\xi', \tau') &= \theta_1(\xi', \tau') - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\tau' - \xi' - 2d/c)^{1/2}} \int_{\chi_2^0(\xi)}^{\xi' + 2d/c} A_n^*(\xi', \tau) \frac{(\xi' + 2d/c - \tau)^{1/2}}{\tau' - \tau} d\tau,\end{aligned}$$

где функции $\xi' = \chi_1(\tau')$ и $\xi' = \chi_2(\tau')$ — соответственно уравнения кривых L_3 и L_4 в переменных x' и t' . Функции χ_1^0 и χ_2^0 — обращения функций χ_1 и χ_2 .

Итак, зная решения $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, последовательно можно вычислить по формулам (9) и (10) функции $\theta_4, \theta_5, \dots, \theta_{2n}, \theta_{2n+1}$ для любого номера n . В частности, полагая $A_n = 0$, получим решение задачи в случае, когда возмущения распространяются только по верхней стороне пластинки, а нижняя сторона пластинки не деформируется.

Решение задачи в случае движущейся пластинки мы дадим в следующей заметке.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Седов, Механика сплошной среды, 2, 1970. ² Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2, 1966. ³ Л. И. Седов, УМН, в. 5 (1940). ⁴ М. Д. Хаскин, ЖЭТФ, 16, в. 7 (1946). ⁵ М. Д. Хаскин, Прикл. матем. и мех., 11, в. 1 (1946). ⁶ Е. А. Красильщикова, ДАН, 203, № 2 (1972). ⁷ Е. А. Красильщикова, Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, 1952. ⁸ Е. А. Krassilchikova, Intern. Congress for Applied Mechanics, IX, Brussels, 1956, Actes, 3, 1957.