

А. С. КРОНРОД

О НЕМАЖОРИРУЕМОМ РЕЦЕПТЕ ВЫБОРА ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ЗАДАННОМ УРОВНЕ ДОСТОВЕРНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 V 1972)

Пусть $F(\bar{x}, \bar{a})$ — измеримая в смысле n -мерной меры Лебега плотность вероятности случайной векторной величины $\bar{x} \equiv x_s(\bar{a})$, где $\bar{a} \equiv \{a_i\}$ — тоже вектор, причем $s = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, k$.

Пусть в пространстве $A_k \equiv \{a_i\}$ задана вполне аддитивная мера μ . На распределение $\varphi(\bar{a})$ накладывается лишь предположение измеримости.

Ставится следующий вопрос: при конкретной реализации ξ случайной величины $\bar{x}(\bar{a}_0)$ и заданного $\varepsilon > 0$ указать область $Q(\xi, \varepsilon) \subset A_k$ такую, чтобы $\bar{a}_0 \in Q(\xi, \varepsilon)$ с достоверностью $1 - \varepsilon$.

Задание $Q(\xi, \varepsilon)$ по ξ и ε мы назовем рецептом. Рецепт выбора доверительной области называется немajorируемым, если не существует такого рецепта построения $Q'(\xi, \varepsilon)$ по ξ и ε , что

$$\mu[Q'(\xi, \varepsilon)] < \mu[Q(\xi, \varepsilon)]$$

при любом выборе μ -измеримого закона распределения $\varphi(\bar{a})$.

Теорема 1. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пусть точке $\bar{a}_0$ соответствует измеримое лебегово множество $P \equiv P(\bar{a}_0, \varepsilon)$ в пространстве R_n такое, что $F(\bar{x}, \bar{a}_0) \geq F(\bar{y}, \bar{a}_0)$ при $\bar{x} \in P$ и $\bar{y} \notin P$, причем

$$\int_P F dx = 1 - \varepsilon.$$

Каждой реализации ξ случайной величины $\bar{x}$ сопоставим область $Q(\xi, \varepsilon) \subset A_k$, включающую те и только те значения $\bar{a}$, для которых $\xi \in P(\bar{a}, \varepsilon)$.

Такое задание области $Q(\xi)$ является немajorируемым рецептом.

Доказательство этого утверждения легко следует из теоремы Фубини (достаточно только рассмотреть δ -образные распределения векторов $\bar{a}$).

Теорема 2. Пусть теперь задана априорная плотность вероятности $\varphi(\bar{a})$ для вектора $\bar{a}$.

Тогда немajorируемый рецепт построения доверительной области $Q(\xi, \varepsilon)$ с уровнем достоверности $1 - \varepsilon$ состоит в том, что для данной реализации ξ берется область $Q(\xi, \varepsilon) \subset A_k$, являющаяся верхним лебеговским множеством функции $\Phi(\xi, \bar{a}) = F(\xi, \bar{a})\varphi(\bar{a})$ таким, что

$$\int_{Q(\xi, \varepsilon)} \Phi(\xi, \bar{a}) d\bar{a} = (1 - \varepsilon) \int \Phi(\xi, \bar{a}) d\bar{a}.$$

В обеих теоремах предполагается, что все встречающиеся интегралы сходятся.

Е. М. Ландис заметил, что если теорема 2 дает окончательное решение вопроса, то для теоремы 1 возможна более сильная постановка: для каждой данной реализации ξ найти область $Q(\xi, \varepsilon)$ так, чтобы при заданном уровне достоверности $1 - \varepsilon$ эта область была минимальная. Эту задачу я решать не умею.

Центральный научно-исследовательский институт патентной информации и технико-экономических исследований Комитета по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР

Поступило
16 IV 1972