

Б. А. КУШНЕР

ТЕОРЕМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ВЫЧИСЛИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 4 V 1972)

1. В заметке рассматриваются алгоритмические операторы, соответствующие двум концепциям вычислимого (конструктивного) действительного числа — квазичислам и псевдочислам ⁽¹⁾. Работа выполнена в рамках конструктивного направления в математике. Вместе с тем, читатель, не владеющий конструктивной спецификой или не заинтересованный в ней, может считать, что речь идет о вычислимых операторах двух типов: в первом случае (К-операторы) аргументами и значениями оператора являются коды вычислимых, вычислимо сходящихся последовательностей рациональных чисел, во втором (П-операторы) — коды вычислимых, сходящихся (в традиционном смысле этого слова) последовательностей рациональных чисел. (В обоих случаях дополнительно требуется, чтобы оператор сохранял некоторое естественное отношение равенства.)

2. Приведем основные определения и обозначения. В дальнейшем мы считаем фиксированным некоторый достаточно широкий алфавит A . Все упоминаемые множества считаются множествами слов в A , а все алгоритмы — нормальными алгоритмами в каком-нибудь фиксированном двухбуквенном расширении A . Запись (код) алгоритма $\mathcal{A}$ обозначается посредством $\varepsilon \mathcal{A} \mathfrak{Z}$.

Пусть M_1, M_2 — два множества слов. Будем говорить, что алгоритм α является алгоритмом типа $M_1 \rightarrow M_2$, если α перерабатывает всякое слово P из M_1 , к которому он применим, в слово из M_2 . Если α сверх того применим к любому слову из M_1 , то мы будем говорить, что α является алгоритмом типа $M_1 \rightarrow M_2$. Через H обозначается множество натуральных чисел (т. е. слов вида $0, 0|, 0||\dots$). Если M — множество слов, то под последовательностью элементов M мы понимаем алгоритм типа $H \rightarrow M$.

Пусть α — последовательность рациональных чисел (п.р.ч.). Назовем α фундаментальной, если можно построить алгоритм β типа $H \rightarrow H$ (регулятор фундаментальности α), так что при $i, j \geq \beta(n)$ выполняется $|\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n}$. П.р.ч. α назовем квазифундаментальной, если неверно, что она не фундаментальна. Наконец, п.р.ч. α называется псевдофундаментальной, если выполняется $\forall n \neg \neg \exists m \forall i, j (i, j \geq m \Rightarrow |\alpha(i) - \alpha(j)| < 2^{-n})$. (Например, псевдофундаментальной является любая монотонная ограниченная п.р.ч.).

Только что приведенным определениям соответствуют три понятия конструктивного действительного числа ⁽¹⁾.

FR-числом (дуплексом) называется слово, либо являющееся рациональным числом, либо имеющее вид $\varepsilon \alpha \mathfrak{Z} \diamond \varepsilon \beta \mathfrak{Z}$, где α — фундаментальная п.р.ч., β — ее регулятор фундаментальности. Квазичислом (псевдочислом) называется слово, либо являющееся рациональным числом, либо имеющее вид $\varepsilon \alpha \mathfrak{Z} \diamond$, где α — квазифундаментальная (соответственно псевдофундаментальная) п.р.ч. Для дуплекса (квазичисла, псевдочисла) x мы будем обозначать через $\underline{x}$ задающую его п.р.ч. (стационную п.р.ч., если x — рациональное число). Множества дуплексов, квазичисел и псевдочисел мы будем обозначать соответственно через D, K и

П. Ясно, что $K \subseteq H$, причем, как хорошо известно, это включение строгое. На множестве $D \cup H$ естественным образом вводятся отношения равенства и порядка; в связи с этими отношениями будут использоваться обычные обозначения.

Пусть теперь Ω обозначает любое из множеств D , K и H . Ω -оператором назовем алгоритм Ψ типа $\Omega \rightarrow \Omega$ такой, что при любых $q_1, q_2 \in \Omega$, если $q_1 = q_2$, то $\Psi(q_1) = \Psi(q_2)$. D-операторы с точностью до технических деталей соответствуют всюду определенным конструктивным функциям в смысле Маркова (см. ⁽²⁾ и ⁽¹⁾); K-операторы — всюду определенным операторам из квазичисел в квазичисла, введенным и изучавшимся в ^(3, 4); наконец, П-операторы (операторы над псевдочислами), по-видимому, рассматриваются впервые.

В следующих пунктах буквы x, p, q с индексами или без них используются в качестве переменных соответственно по дуплексам, квазичислам и псевдочислам.

3. В работе автора ⁽³⁾ показано, что K-операторы обладают некоторыми свойствами непрерывности, именно, они не могут иметь конструктивных разрывов. Совершенно аналогично может быть установлена и неразрывность П-операторов. В этом пункте приведенные результаты усиливаются до теорем, показывающих, что K- и П-операторы в определенном смысле конструктивно непрерывны. В дальнейшем мы будем для краткости формулировать определения применительно к П-операторам; для K-операторов соответствующие определения получаются простой заменой множества H на множество K .

Скажем, что П-оператор Ψ непрерывен в точке q , если можно построить алгоритм δ типа $H \rightarrow H$ (регулятор непрерывности Ψ в точке q) так, что при любых q_1 и n из $|q_1 - q| < 2^{-\delta(n)}$ следует $|\Psi(q_1) - \Psi(q)| < 2^{-n}$. Скажем, что П-оператор Ψ непрерывен, если можно построить алгоритм γ (регулятор непрерывности Ψ), так что при любом $q \in \tilde{q}_q^*$ является регулятором непрерывности Ψ в точке q . (Здесь посредством $\tilde{q}_q^*$ обозначен некоторым стандартным образом получающийся из γ алгоритм такой, что при каждом $n \in \tilde{q}_q^*(n) \simeq \gamma(q * n)$ (ср. ⁽⁵⁾)).

Теорема 1. *Можно построить П-оператор, не являющийся непрерывным в нуле.*

Скажем, что П-оператор Ψ продолжает D-оператор (т. е. конструктивную функцию) f , если при любых x и q из $x = q$ следует $\Psi(q) = f(x)$. Поскольку ⁽⁵⁾ всякий D-оператор непрерывен, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Существует П-оператор, не являющийся продолжением никакого D-оператора (конструктивной функции).*

В случае K-операторов существование не непрерывных K-операторов и утверждение, аналогичное следствию 1, установлены в ⁽⁴⁾. Следствие 1 может быть дополнено следующим утверждением, вытекающим из формулируемой ниже теоремы 3 или леммы 1 и известных конструкций не равномерно непрерывных конструктивных функций (см. ^(6, 7)).

Теорема 2. *Можно построить D-оператор (всюду определенную конструктивную функцию) f , так что невозможен П-оператор, продолжающий f .*

Вместе с тем, каждый D-оператор может быть продолжен до K-оператора ⁽⁴⁾.

Обозначим через K^- множество квазичисел таких, что $q \in K^-$ тогда и только тогда, когда п.р.ч. $\underline{q}$ не возрастает и $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigvee_{j \geq n} \underline{q}(i) = \underline{q}(j)$ (т. е. п.р.ч. $\underline{q}$ «стабилизируется»). Ясно, что любое квазичисло из K^- не может не равняться некоторому рациональному числу.

Будем говорить, что П-оператор Ψ почти непрерывен, если можно построить алгоритм $\mathfrak{A}$, перерабатывающий всякое слово вида $q * n$, где $q \in H$, $n \in H$, в положительное квазичисло, принадлежащее K^- и такое, что при любом q_1 из $|q - q_1| < \mathfrak{A}(q * n)$ следует $|\Psi(q_1) - \Psi(q)| < 2^{-n}$. (Таким

образом, δ , соответствующее условию непрерывности в данной точке при данном $\varepsilon = 2^{-n}$, эффективно находится в виде положительного квазичисла из K^- .)

Основным результатом работы является следующая

Теорема 3. *Всякий П-оператор (К-оператор) почти непрерывен.*

В случае К-операторов теорема 3 дает положительный ответ на вопрос, поставленный в (3). Доказательство теоремы 3 опирается на теорему Клини о неподвижной точке (см., например, (9)). Использование теоремы о неподвижной точке происходит в данном случае по следующей схеме (ср. (8)). Пусть нас интересует непрерывность в нуле П-оператора Ψ . Зададимся, для определенности, $\varepsilon = 1$. Пусть, далее, фиксирована какая-нибудь гёделевская нумерация алгоритмов типа $H \rightarrow H$, причем алгоритм с номером i обозначен через φ_i . Обозначим через L такое множество натуральных чисел, что $i \in L$ тогда и только тогда, когда φ_i применим к любому натуральному числу. Строятся алгоритмы α и β со следующими свойствами: 1) если $i \notin L$, то α применим к i , причем $\alpha(i) \in K^-$ и $\alpha(i) > 0$; 2) β является алгоритмом типа $H \rightarrow H$; 3) если $i \in L$, то $\beta(i) \notin L$; 4) если $i \notin L$ и существует псевдочисло q такое, что $|q| < \alpha(i)$ и $|\Psi(q) - \Psi(0)| > 1/2$, то $\beta(i) \in L$. Согласно теореме о неподвижной точке можно найти i_0 так, что при любом k , $\varphi_{i_0}(k) \simeq \varphi_{\beta(i_0)}(k)$. Ввиду (3), $i_0 \notin L$, следовательно, по свойству 1), $\alpha(i_0) \in K^-$, причем, согласно (4), для всех q таких, что $|q| < \alpha(i_0)$, имеет место $|\Psi(q) - \Psi(0)| \leq 1/2 < 1$.

Существенным этапом доказательства теоремы 3 является

Лемма 1. *Каково бы ни было n , невозможны псевдочисло q , П-оператор Ψ и последовательность псевдочисел ω такие, что всегда $|\omega(i) - q| \leq 2^{-i}$ и $|\Psi(\omega(i)) - \Psi(q)| \geq 2^{-n}$.*

Эта лемма аналогична теореме о неразрывности квазифункций (3) и может быть доказана почти точно так же, как и эта теорема, со ссылкой вместо леммы 1 (3) на лемму 2 (10) (см. также доказательство теоремы 2 (10)). Возможно также доказательство леммы 1, использующее теорему о неподвижной точке, по схеме, аналогичной изложенной выше.

Замечание 1. Теорема, аналогичная теореме 3, может быть доказана для действительных функций, вычислимых по Банаху — Мазуру (11).

Замечание 2. Теорема 3 имеет следующий вариант: для данного q и $\varepsilon = 2^{-n}$ отыскиваются квазичисла p_1, p_2 такие, что п.р.ч. $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ стабилизируются, $p_1 < q < p_2$, и интервал с концами p_1, p_2 удовлетворяет требованиям непрерывности для исходного $\varepsilon = 2^{-n}$.

Замечание 3. Квази- и псевдочисла получаются при помощи некоторых процессов «пополнения» метрического пространства рациональных чисел. Аналогичным образом можно определить квази- и псевдопополнения $\overline{M}$ и $\overline{\overline{M}}$ произвольного конструктивного метрического пространства M . Пусть M_1 — сепарабельное, M_2 — произвольное конструктивное метрическое пространство (см. (1, 3)). Теорема 3 может быть доказана для операторов, действующих из $\overline{M}_1$ в $\overline{M}_2$ и из $\overline{\overline{M}}_1$ в $\overline{\overline{M}}_2$ (а также из $\overline{M}_1$ в $\overline{\overline{M}}_2$ и из $\overline{\overline{M}}_1$ в $\overline{M}_2$). Возможно также обобщение теоремы 3 на случай пространств, снабженных квази- и псевдометрикой (метрический алгоритм имеет своими значениями квази- и псевдочисла; под эту схему подпадают рассмотренные только что квази- и псевдопополнения конструктивных метрических пространств). Мы не можем останавливаться здесь на этом вопросе подробнее.

4. Остается открытым вопрос о том, не обладает ли всякий П-оператор какими-нибудь свойствами равномерной непрерывности. (К-оператор может быть эффективно не равномерно непрерывным, см. (4).) Приведем один предварительный результат в этом направлении (для краткости будем говорить о единичном сегменте).

Назовем П-оператор Ψ псевдоравномерно непрерывным,

если $\forall n \neg \neg \exists m \forall q_1 q_2 ((0 \leq q_1, q_2 \leq 1 \ \& \ |q_1 - q_2| < 2^{-m}) \Rightarrow |\Psi(q_1) - \Psi(q_2)| < 2^{-n})$.

Теорема 4. *Всякий непрерывный П-оператор (К-оператор) является псевдоравномерно непрерывным.*

Теорема 4 доказывается с использованием леммы 1 аналогично теореме 2.1⁽⁴⁾.

5. Из леммы 1 так же, как в ⁽³⁾, теорема 9 и в ⁽¹⁰⁾, теорема 2, вытекает

Теорема 5. *Невозможен алгоритм, перерабатывающий запись всякой фундаментальной последовательности псевдочисел, которая не может не сходиться к 0 либо к 1, в псевдочисло, к которому сходится эта последовательность.*

(Понятие фундаментальности вводится для последовательностей псевдочисел точно так же, как и для п.р.ч.)

Вместе с тем, для псевдочисел имеет место теорема о полноте, доказываемая точно так же, как и теорема 3⁽¹⁰⁾: *по всякой фундаментальной последовательности псевдочисел и ее регулятору фундаментальности можно построить псевдочисло, к которому сходится данная последовательность.*

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. А. Шанин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 67, 15 (1962).
² А. А. Марков, Там же, 52, 315 (1958). ³ Б. А. Кушнер, ДАН, 171, № 2 (1966).
⁴ Б. А. Кушнер, ДАН, 177, № 1 (1967). ⁵ Г. С. Цейтин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 67, 295 (1962). ⁶ И. Д. Заславский, Там же, 67, 385 (1962). ⁷ И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин, Там же, 67, 458 (1962). ⁸ Y. N. Moschovakis, Fund. Math., 55, № 3, 215 (1964). ⁹ А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», 1965. ¹⁰ Б. А. Кушнер, Г. С. Цейтин, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 8, 107 (1968). ¹¹ S. Mazur, Computable Analysis, Rozprawy Mat., 33, Warszawa, 1963.