

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

В. Б. АЛЕКСЕЕВ

О ЧИСЛЕ k -ЗНАЧНЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 26 IV 1972)

Пусть S — произвольное частично упорядоченное множество, $|S| = k \geq 2$. Через S^n обозначим n -ю декартову степень S , т. е. множество всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ длины n , в которых все $\alpha_i \in S$. Про два набора $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ будем говорить, что $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$, если $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех i . При этом S^n также становится частично упорядоченным множеством. Если $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ и $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, будем писать $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$. Функцию n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$, отображающую S^n в S , будем называть монотонной относительно S в том и только в том случае, если для любых наборов $\bar{\alpha} \in S^n$ и $\bar{\beta} \in S^n$ из того, что $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$, следует $f(\bar{\alpha}) \leq f(\bar{\beta})$. Семейство функций, монотонных относительно S , в том случае, когда в S имеется ровно один максимальный и ровно один минимальный элемент, образует один из так называемых предполных классов, играющих важную роль при изучении вопросов полноты в k -значных логиках ^(1, 2).

Число различных функций n переменных, монотонных относительно S , будем обозначать $\psi_S(n)$. Целью данной заметки является изучение функции $\psi_S(n)$ для произвольного множества S .

Для частного случая, когда $S = \{0, 1\}$ с неравенством $0 < 1$, соответствующая функция $\psi(n)$ изучалась рядом авторов. Последний результат, полученный в ⁽³⁾, имеет вид

$$2^{(1+\alpha_n) C_n^{[n/2]}} \leq \psi(n) \leq 2^{(1+\beta_n) C_n^{[n/2]}}$$

где $\alpha_n = Ce^{-n/4}$; $\beta_n = (C' \log n) / \sqrt{n}$. Отсюда, в частности, получается асимптотика для $\log \psi(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если S тривиально, т. е. любые два элемента в S несравнимы, то, очевидно, любая функция, отображающая S^n в S , монотонна относительно S . В дальнейшем будем предполагать, что S не тривиально.

Для функции $\psi_S(n)$ при произвольном S из ⁽⁴⁾ может быть получен порядок для $\log \psi_S(n)$:

$$\log \psi_S(n) \asymp k^n / \sqrt[n]{n}.$$

Результат, полученный в данной заметке, удобно представить в виде

$$\psi_S(n) = d^K, \quad K = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt[n]{n}} (1 + \varepsilon(n)),$$

где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а для констант d и D , зависящих от S , будут даны алгоритмы вычисления их по данному S .

Для удобства будем считать, что исходное множество состоит из элементов $1, 2, \dots, k$. Множеству S сопоставим так называемый базисный граф — ориентированный граф с k вершинами, соответствующими элементам множества S , в котором дуга (i, j) имеется тогда и только тогда, когда $i > j$ в S и не существует l такого, что $i > l > j$. Введем на плоскости ось z и сопоставим каждой точке A плоскости число z_A — проекцию A на ось z . В частности, если граф, соответствующий S , изображен на плоскости, то

каждой вершине i будет соответствовать число z_i . С каждым изображением базисного графа свяжем случайную величину $\xi = z_A$, где точка A может попасть в любую вершину графа с вероятностью $1/k$. Тогда

$$M\xi = z_{\text{ср}} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_k}{k}, \quad D\xi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (z_i - z_{\text{ср}})^2.$$

Изображение базисного графа назовем выделенным, если $z_i - z_j \geq 1$ для любой дуги (i, j) и после удаления всех дуг (i, j) , для которых $z_i - z_j > 1$, для каждой связной компоненты в оставшемся графе будет $z_{\text{ср}} = 0$. Выделенных изображений конечное число, и легко указать алгоритм, перебирающий все выделенные изображения. Выделенное изображение с наименьшей дисперсией назовем оптимальным.

Подмножество $T \subset S^n$ называется независимым, если любые два элемента из T несравнимы. Максимальную мощность независимого подмножества $T \subset S^n$ будем обозначать (S^n) . Величина (S^n) представляет самостоятельный интерес, а также играет важную роль при изучении $\psi_S(n)$.

Теорема 1. Для некоторой функции $\varepsilon_1(n)$ такой, что $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$(S^n) > \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt{n}} (1 - \varepsilon_1(n)),$$

где D — дисперсия оптимального изображения S .

Доказательство. По оптимальному изображению S построим соответствующее ему изображение S^n . Будем изображать S^n в виде базисного графа, причем $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ будем располагать так, чтобы было $z_{\alpha} = z_{\alpha_1} + \dots + z_{\alpha_n}$. Пусть $M = \{\bar{a}: -1/2 < z_{\alpha} \leq 1/2\}$. Доказательство теоремы основано на том, что M — независимое множество. $|M|$ оценивается с использованием теоремы Б. В. Гнеденко ⁽⁵⁾.

Последовательность $\bar{a}_1 < \bar{a}_2 < \dots < \bar{a}_s$ называется цепью.

Лемма 1. Множество S^n можно разбить на цепи так, что для подмножества R_1 цепей, не проходящих через M , будет

$$|R_1| < \frac{C \ln^4 n}{n} k^n,$$

где C — некоторая константа.

Эта лемма доказывается путем довольно громоздких построений с использованием теоремы о паросочетаниях ⁽⁶⁾ и теоремы Гейла из теории транспортных задач ⁽⁷⁾.

Для множества R_0 цепей, проходящих через M , при $n \rightarrow \infty$ будет

$$|R_0| = |M| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Из леммы 1 и теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. $(S^n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt{n}}$, где D — дисперсия оптимального изображения S .

Будем писать $H_1 \leq H_2$, где $H_1 \in S$ и $H_2 \in S$, если $a \leq b$ для любых $a \in H_1$ и $b \in H_2$.

Рассмотрим всевозможные цепочки $H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{s+1}$, где все $H_i \in S$, $s \geq 1$, $|H_0| = |H_{s+1}| = 1$ и $H_i \neq H_j$ при $i \neq j$. Таких цепочек конечное число. Пусть $d = \max(|H_1| \cdot \dots \cdot |H_s|)$, где максимум берется по всем описанным выше цепочкам.

Теорема 3. Для некоторой функции $\varepsilon_2(n)$ такой, что $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\psi_S(n) > d^{K_2}, \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt{n}} (1 - \varepsilon_2(n)).$$

Доказательство. Существует цепочка $\{i\} \leq H_1 \leq \dots \leq H_s \leq \{j\}$, для которой $|H_1| \cdot \dots \cdot |H_s| = d$. Рассмотрим оптимальное изображение S и соответствующее ему изображение S^n . Пусть $M_r = \{\bar{\alpha}: r-1 < z_{\bar{\alpha}} \leq r\}$, где $r = 1, 2, \dots, s$. Пусть $f(\bar{\alpha}) \in H_r$, если $\bar{\alpha} \in M_r$; $f(\bar{\alpha}) = i$, если $z_{\bar{\alpha}} \leq 0$; и $f(\bar{\alpha}) = j$, если $z_{\bar{\alpha}} > s$. Тогда f монотонна относительно S . Число таких функций

$$|H_1|^{|M_1|} \cdot \dots \cdot |H_s|^{|M_s|}. \quad (2)$$

Используя теорему Б. В. Гнедево (5), можно показать, что для некоторой функции $\varepsilon_2(n)$ такой, что $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$|M_r| > \frac{1}{V^{2\pi D}} \frac{k^n}{V^n} (1 - \varepsilon_2(n)) \quad (3)$$

для всех $r = 1, 2, \dots, s$. Из (2) и (3) получим утверждение теоремы.

Пусть τ — произвольная подстановка координат в наборах из S^n . Она индуцирует подстановку среди наборов и переводит разбиение на цепи P , построенное в лемме 1, в новое разбиение $\tau(P)$. Рассматриваются все $n!$ получаемых так разбиений на цепи. Для каждого разбиения рассматривается $\mu(n)$ специальным образом построенных упорядоченностей цепей, причем

$$\log \mu(n) < k^{n/2+C} V_n^{-1} \ln^3 n, \quad (4)$$

где C — некоторая константа.

Пусть значения функции f , монотонной относительно S , заданы на части наборов и $f(\bar{\gamma})$ еще не определено. Если из уже заданных значений вытекает по монотонности, что $f(\bar{\gamma}) \geq i$ хотя бы для одного $i \in S$, то будем говорить, что значение функции f на наборе $\bar{\gamma}$ ограничено снизу. Точно так же будем говорить об ограничениях сверху.

Для данной функции f , монотонной относительно S , и для данного упорядоченного разбиения на цепи назовем цепь $\bar{\alpha}_1 < \bar{\alpha}_2 < \dots < \bar{\alpha}_s$, входящую в $\tau(R_0)$, особой, если после задания функции на всех предыдущих цепях будет иметь место хотя бы одна из следующих ситуаций: 1) $f(\bar{\alpha}_1)$ не ограничено снизу; 2) $f(\bar{\alpha}_s)$ не ограничено сверху; 3) для некоторого $j \geq 2$ ограничения снизу на $f(\bar{\alpha}_j)$, обусловленные заданием функции на предыдущих цепях, усливаются при задании $f(\bar{\alpha}_{j-1})$.

Имеет место

Лемма 2. Для каждой функции f , монотонной относительно S , среди $n! \mu(n)$ рассмотренных выше упорядоченных разбиений на цепи имеется такое, при котором особых цепей не более, чем $C k^n n^{-3/4}$, где C — некоторая константа.

Для каждого из $n! \mu(n)$ упорядоченных разбиений S^n на цепи будем задавать функции согласно порядку цепей, причем так, чтобы полученная функция была монотонна относительно S и особых цепей было бы не более t (t — некоторый параметр). Имеет место

Лемма 3. На каждой неособой цепи можно задать функцию не более чем d способами, на произвольной цепи — не более чем $(kn+1)^h$ способами.

Из леммы 3 вытекает, что число функций, которые будут нами построены, не превосходит

$$n! \mu(n) C_R^t (kn+1)^{k(|R_t|+t)} d^{R-t},$$

где $R = |R_0|$. По лемме 2, если $t = t_0 = C k^n n^{-3/4}$, то нами хотя бы по одному разу будут построены все функции, монотонные относительно S . Отсюда

$$\psi_S(n) \leq n! \mu(n) C_R^{t_0} (kn+1)^{k(|R_t|+t_0)} d^{R-t_0}.$$

Учитывая (1), (4) и лемму 1, получим

$$\log [n! \mu(n) C_R^{l_0} (kn+1)^{k(|R_1|+l_0)}] = o(R).$$

Поэтому, учитывая (1), получаем следующую теорему.

Теорема 4. Для некоторой функции $\varepsilon_3(n)$ такой, что $\varepsilon_3(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\psi_S(n) < d^{K_3}, \quad K_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon_3(n)).$$

Из теорем 3 и 4 вытекает основная

Теорема 5. Для некоторой функции $\varepsilon(n)$ такой, что $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\psi_S(n) = d^K, \quad K = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \frac{k^n}{\sqrt{n}} (1 + \varepsilon(n)).$$

Подобный же результат верен и для функций, отображающих S_1^n в S_2 , только в этом случае основание d определяется с помощью S_2 , а показатель с помощью S_1 .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. В. Яблонский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **51**, 5 (1958). ² В. В. Мартынюк, Сборн. Проблемы кибернетики, в. 3, 49 (1960). ³ D. Kleitman, Proc. Am. Math. Soc., **21**, № 3, 677 (1969). Русский пер. Д. Клейтмен, Кибернетич. сборн., № 7, 43 (1970). ⁴ В. К. Коробков, Дискретный анализ, в. 5, 19 (1965). ⁵ Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, «Наука», 1964. ⁶ О. Оре, Теория графов, «Наука», 1968. ⁷ Л. Форд, Д. Фалкерсон, Потоки в сетях, М., 1966.