Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 4

УДК 517.51 МАТЕМАТИКА

З. А. ЧАНТУРИЯ

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 11 V 1972)

1. Хорошо известна теорема М. Рисса о том, что тригонометрическая система является базисом во всех пространствах L_p, $1 < p < \infty$ (см. [1], стр. 593–594) и в то же время не является базисом в пространствах $L(0,1)$ и $C(0,1)$. Более того, еще Г. Фабером [2] было доказано, что никакая система тригонометрических полиномов $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что степень полинома $T_n(x)$ равна n, не образует базиса в пространстве $C(0,1)$. Аналогичный результат для пространства $L(0,1)$ вытекает из теоремы Лозинского — Харшиладзе для этого пространства [3]. В [4] мы усилили результат Фабера в том смысле, что степени полиномиального базиса в пространстве $C(0,1)$ растут быстрее, чем $n+o(\ln n)$.

Поэтому естественно возникла задача о порядке роста степеней ортогонального полиномиального базиса в пространствах $C(0,1)$ и $L(0,1)$. Задача эта была поставлена на IV Всесоюзном математическом съезде П. Л. Ульяновым в 1961 г. ([5, 6], см. также [7]).

Существование таких базисов в случае алгебраических полиномов впервые было доказано К. М. Шайдуковым ([8], см. также [9]).

В [10] мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить ортогональные полиномиальные тригонометрические базисы в пространствах $L(0,1)$ и $C(0,1)$ с порядком роста $n^{2+\varepsilon}$.

В действительности, справедлива более сильная

Теорема 1. *Пусть $\omega(n)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} < \infty;$$

тогда можно построить ортогональный полиномиальный тригонометрический базис $\{T(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $L(0,1)$ и $C(0,1)$ такой, что степень полинома $T_n(x)$ не больше, чем $n^{3/2}\omega(n)$ при $n > n_0$.

2. Несколько иначе обстоит дело в алгебраическом случае. Поллард [11] доказал, что ортогональная система алгебраических полиномов Лежандра образует базис в пространствах $L_p(-1,1)$ для $4/3 < p < 4$ и не является базисом в пространствах $L_p(-1,1)$ для $p \in (1, 4/3) \cup (4, \infty)$. Дж. Нейман и В. Рудин [12] дополнили этот результат; они доказали, что система полиномов Лежандра не является базисом в пространствах L_p для $p = 4/3$ и $p = 4$.

Ясно, что то же справедливо для $L_p(0,1)$.

Но так как система Лежандра единственна, с точностью до знака, среди систем ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что степень полинома $P_n(x)$ равна n для всех n, то, значит, для $p \notin (4/3, 4)$ порядок роста степеней алгебраического полиномиального ортогонального базиса в пространстве L_p больше, чем n.

В [10] мы доказали, что в $L(0,1)$ и $C(0,1)$ существуют алгебраические полиномиальные ортогональные базисы с порядком роста $n^{3+\varepsilon}$.

Здесь мы утверждаем, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $A > \frac{\pi e}{4} = 2{,}1349\ldots$

Тогда существует ортогональный алгебраический полиномиальный базис $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *во всех пространствах* $L_p(0,1)$ *для* $p \in (1, {}^4/_3] \cup [4, \infty)$ *такой, что степень полинома* $P_n(x)$ *не больше* An *для* $n > n_0$.

Теорема 3. *Пусть* $\omega(n)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1; *тогда можно построить ортогональный алгебраический полиномиальный базис* $\{P_n(x)\}$ *в пространствах* $L(0,1)$ *и* $C(0,1)$ *такой, что степень полинома* $P_n(x)$ *не больше* $n^{3/2}\omega(n)$ *при* $n > n_0$.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
19 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. [2] G. Faber, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., **23** (1914). [3] С. М. Лозинский, ДАН, **61**, № 2 (1948). [4] З. А. Чантурия, Матем. заметки, **2**, № 2 (1967). [5] П. Л. Ульянов, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, **2**, Л., 1964. [6] П. Л. Ульянов, УМН, **19**, № 1 (1964). [7] C. Foias, I. Singer, Rev. Math pures et appl., **6**, № 3 (1961). [8] К. М. Шайдуков, Научн. тр. Казанск. инст. инж. строит. нефт. пром., **5** (1957). [9] А. М. Олевский, Изв. АН СССР, сер. матем., **34**, № 4 (1970). [10] З. А. Чантурия, Studia Math., **41**, № 3 (1972). [11] H. Pollard, Trans. Am. Math. Soc., **62** (1947); **63** (1948). [12] J. Neumann, W. Rudin, Proc. Am. Math. Soc., **3** (1952).