

С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН, Т. Г. ПЛЕТНЕВА

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 IV 1972)

Настоящая статья продолжает исследования В. А. Кондратьева и авторов (¹⁻³). Целью ее является изучение классических положительных решений равномерно параболических по И. Г. Петровскому систем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{|k| \leq 2b} A_k(x, t) D_x^k u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

с равномерно ограниченными коэффициентами, модуль непрерывности которых по пространственным координатам $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяет условию Дини.

Напомним, что от систем вида (1) в работах (¹⁻³) требовалось, чтобы существовали ограниченные производные $D_x^j A_k$, $j \leq k$, и A_k с $|k| = 2b$ были равномерно непрерывны. При этом изучалась L_1 -норма самого решения и использовался развитый в этих работах аппарат специальных допустимых пробных функций.

Здесь для системы (1) с коэффициентами из классов Дини получают сходные результаты, однако изучение проводится в иных L_1 -нормах, в которых участвуют как решения, так и их производные до порядка уравнения с подходящими весовыми множителями. В основе настоящей работы лежат новые априорные L_1 -оценки, представляющие, на наш взгляд, самостоятельный интерес, получение таких оценок существенно использует аппарат фундаментальных решений параболических систем (^{4, 5}).

С помощью этих оценок в случае $b = 2v + 1$ устанавливаются суммируемость положительных решений в области, примыкающей к характеристической гиперплоскости, теоремы о цилиндрах, из которых следует описание возможности роста положительных решений в открытом слое. Последнее позволяет представить положительные решения в виде интеграла Пуассона — Стильтьеса с мерой, сосредоточенной на начальной гиперплоскости, и установить ряд интересных фактов, выводимых из такого представления. Эти предложения являются усилениями и широкими обобщениями результатов работ (⁶⁻¹¹).

В заключение приводятся примеры того, что положительные решения параболических по Петровскому уравнений в случае $b = 2v$ описанными свойствами не обладают.

Мы всюду считаем, что постоянные в оценках зависят от величин, входящих в предполагаемые условия, и не зависят от изучаемых решений.

1. Предположения. Определения. Здесь используются следующие предположения:

α_1) A_k — ограниченные матрицы-функции, $|A_k| < M$.

α_2) Система (1) равномерно параболическая по Петровскому с постоянной равномерной параболическостью δ .

α_3) A_k равномерно непрерывны и функция

$$\omega(h) = \sup_{\substack{k, t \\ (x-y) < h}} |A_k(x, t) - A_k(y, t)|$$

удовлетворяет условию Дини $\Omega(z) = \int_0^z \omega(h) \frac{dh}{h} < +\infty$.

α_4) $A_k(\beta^{1/(2b)}x', \beta t')\beta^{(2b-|k|)/(2b-1)}$, как функции x', t' , удовлетворяют условиям α_1, α_3 равномерно по $\beta \in (0, \varepsilon)$.

α_5) $B_{jk}(x, t) = D_x^j A_k(x, t)$, $j \leq k$, ограниченные постоянной M функции.

α_6) $B_{jk}(\beta^{1/(2b)}x', \beta x')\beta^{(2b-|j|-k)/(2b-1)}$, $j \leq k$ равномерно по $\beta \in (0, \varepsilon)$ ограниченные постоянной M функции.

α_7) A_k с $|k| = 2b$ равномерно непрерывны.

α_8) A_k с $|k| = 2b$ удовлетворяют условию α_3 и $\Omega_1(a) = \int_0^a \Omega(z) \frac{dz}{z} < +\infty$.

Через G мы обозначим область R^{n+1} , лежащую в слое $\Pi_T = \{(t, x), x \in R^n, t \in (0, T)\}$, граница G состоит из области V гиперплоскости $t=0$, гладкой поверхности S , нигде не касающейся характеристических гиперплоскостей $t = \text{const}$ и куска гиперплоскости $t=T$. Параболическая граница $\partial G = \{x \in V, t=0\} \cup S$.

Пусть $p(x, t; \xi, \tau)$ — параболическое расстояние ⁽⁴⁾ между точками (x, t) , (ξ, τ) ; $p(x, t; \xi, \tau) = \inf_{(\xi, \tau) \in \partial G} p(x, t; \xi, \tau)$; $p(x, t; \xi, \tau; \partial G) = \min(p(x, t; \partial G), p(\xi, \tau; \partial G))$; $M(r) = r$ при $r \in [0, 1]$, $M(r) = 1$ при $r \geq 1$. Введем в рассмотрение следующие нормы:

$$\|u\|_{r; G; m} = \sum_{|j| \leq r} \iint_G \{M[p(x, t; \partial G)]\}^{|j|+m} |D_x^j u(x, t)| dx dt;$$

$$\|u\|_{r; G; 0} = \|u\|_{r, G};$$

$$\langle f \rangle_{G; m} = \iint_G d\xi d\tau \iint_G \frac{|f(x, t) - f(\xi, \tau)|}{p(x, t; \xi, \tau)^{n+2b}} \{M[p(x, t; \xi, \tau; \partial G)]\}^{2b+m} dx dt.$$

Остальные определения и обозначения взяты из работ ^(2, 3).

2. Основная априорная L_1 -оценка. Справедлива следующая Теорема 1. Пусть выполнены условия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Если $u(x, t)$ — классическое решение системы (1) в G и $\|f\|_{0; G; 2b+m} < +\infty$; $\langle f \rangle_{G; m} < +\infty$; $\|u\|_{0; G; m} < +\infty$, то $\|u\|_{2b; G; m} < +\infty$ и найдется положительная постоянная λ_1 такая, что

$$\|u\|_{2b; G; m} \leq \lambda_1 (\|u\|_{0; G; m} + \|f\|_{0; G; 2b+m} + \langle f \rangle_{G; m}). \quad (2)$$

Если же выполнены условия α_1, α_2 и α_8 и $\|f\|_{0; G; 2b+m} < +\infty$, $\|u\|_{0; G; m} < +\infty$, то $\|u\|_{2b-1; G; m} < +\infty$ и найдется положительная постоянная λ_2 , зависящая от T , такая, что

$$\|u\|_{2b-1; G; m} \leq \lambda_2 (\|u\|_{0; G; m} + \|f\|_{0; G; 2b+m}). \quad (3)$$

Доказательство теоремы 1 основано на специальных внутренних L_1 -оценках, выводимых из интегрального представления решения через фундаментальную матрицу решений системы с замороженными коэффициентами ⁽⁴⁾, гл. 2). Для получения оценок в весовых нормах область разбивается на последовательность полосок, ширина которых соизмерима с параболическим расстоянием до границы, и в каждой из них используется соответствующим образом переписанная внутренняя оценка.

3. Теорема о цилиндрах. Дальнейшие результаты получаются применением рассуждений работ ^(1, 3) к решениям уравнений с замороженными коэффициентами и теоремы 1. Вначале, как обычно, рассматривается модельный случай, переход к общему случаю достигается некоторой модификацией рассуждений работы ⁽⁴⁾.

Приведем для примера типичный результат.

Теорема 2. Рассматриваются регулярные в Π_T^2 решения $u(x, t)$ системы (1) с $b = 2v + 1$.

1) Пусть выполнены условия α_1 в Π_T^2 , α_4 в $\Pi_{T\beta^{-1}}^{2\beta-1(2b)}$. Если $\|u^-\|_{0; \Pi_T^2; m} < +\infty$, $\|f\|_{0; \Pi_T^2; 2b+m} < +\infty$; $\langle f \rangle_{\Pi_T^2; m} < +\infty$ для некоторого $m > -2b$, то $\|u\|_{2b; \Pi_1^{1+c}; m} < +\infty$, $T_1 < T$, $c \in (0, 1)$, и найдутся положительные постоянные $\varepsilon_1, h_1, \mu_1, a_1$ такие, что для любого $h \in (0, h_1)$

$$\|u\|_{2b; \Pi_{T-h}^{1+a_1 h^{1/(2b)}}} \leq \mu_1 (\|u\|_{0; \Pi_{(\varepsilon_1, T)}^1} + \|u^-\|_{0; \Pi_T^2; m} + \|f\|_{0; \Pi_T^2; 2b+m} + \langle f \rangle_{\Pi_T^2; m}). \quad (4)$$

2. Пусть выполнены условия α_1, α_7 в Π_T^2 , α_8 в $\Pi_{T\beta^{-1}}^{2\beta-1(2b)}$. Если $\|u^-\|_{0; \Pi_T^2; m} < +\infty$; $\|f\|_{0; \Pi_T^2; 2b+m} < +\infty$, то $\|u\|_{0; \Pi_{T_1}^{1+c}} < +\infty$ и найдутся положительные постоянные $\varepsilon_2, h_2, \mu_2, a_2$ такие, что для любого $h < h_2$

$$\|u\|_{0; \Pi_{T-h}^{1+a_2 h^{1/(2b)}}; m} \leq \mu_2 (\|u\|_{0; \Pi_{(\varepsilon_2, T)}^1} + \|u^-\|_{0; \Pi_T^2; m} + \|f\|_{0; \Pi_T^2; 2b+m}). \quad (5)$$

Заметим, что в теореме 2 фигурируют нормы, в которых $p(x, t; \partial G) = t^{1/(2b)}$; $p(x, t; \xi, \tau; \partial G) = \min(t^{1/(2b)}, \tau^{1/(2b)})$.

4. О росте положительных решений, определенных в слое. Из неравенств (4), (5) выводятся теоремы о возможном росте решений системы (1) с $b = 2v + 1$, определенных в слое Π_T , повторением рассуждений работ (4). При этом получаются результаты двух сортов:

1) для систем с непрерывными по Дини коэффициентами применяется оценка (4), в которой налагается условие на более жесткую норму правой части $f(x, t)$ (но и большая информация получается о решении);

2) применение неравенства (4) приводит к результатам, совершенно аналогичным результатам (4).

Так, например, если коэффициенты $A_k(x, t)$ растут не быстрее $|x|^{(2b-|k|)/(2b-1)}$ и $A_k(x, t)|x|^{(|k|-2b)/(2b-1)}$ при $|x| > 1$ удовлетворяют по x равномерному условию Дини, то решение $u(x, t)$ в Π_T однородной системы (1) с $\|u^-\|_{0, \Pi_T^2; m} \leq C_1 \exp\{c_1|x|^q\}$ удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{2b; \Pi_T^{x, 1}; m} \leq C_2 \exp\{c_2|x|^q\}. \quad (6)$$

5. Интегральное представление решений, определенных в слое. Получению интегральных представлений решений параболических уравнений, определенных в открытом слое Π_T , посвящены работы (6-11). В работах (6-8, 10) рассматриваются уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами и доказывается возможность интегрального представления положительного решения (решения с предписанным ростом его отрицательной части). В работе (9) представление получено для решений параболических уравнений любого порядка с вещественными достаточно гладкими коэффициентами в предположении, что решение $u(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{R^n} |u(x, t)| \exp(-c|x|^q) dx \leq M_1.$$

Наши результаты позволяют уточнить и обобщить теоремы работ (6-11) в следующих направлениях: получить представление решений при условиях на отрицательную часть в случае системы (1) с $b = 2v + 1$, рассмотреть комплекснозначные коэффициенты и решения, а положительность понимать в смысле любого конуса K (4); уменьшить условия на гладкость коэффициентов.

Теорема 3. Пусть выполнены условия $\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6$. Если $u(x, t)$ — регулярное решение системы (1) с $b + 2v + 1$ в слое Π_T , для которого $\int_{|\xi-x|<1} |u^-(\xi, t)| d\xi \leq C_1 \exp\{c_1|x|^q\}$, то найдется положительное η такое, что в Π_η решение $u(x, t)$ представимо в виде

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(x, t; \xi, 0) \rho(d\xi), \quad (8)$$

где $Z(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (1) $(^4, ^5)$, а $\rho(E)$ — комплексная борелевская мера такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-\beta|x|^q\} / \rho(dx) < +\infty$$

при некотором положительном β .

Для одного уравнения с вещественными коэффициентами и $b = 2v + 1$ из теоремы 2 следуют теоремы единственности решения задачи Коши, когда начальные условия принимаются в слабом смысле, теорема Фату и др.

6. О положительных решениях параболических уравнений с весом $2b = 4v$. Рассмотрим параболическое по Петровскому уравнение $\partial u / \partial t = -\partial^{4v} u / \partial x^{4v}$. Будем искать его автомодельные решения $u(x, t) = t^{-1/(4v)} f(xt^{-1/(4v)})$. Тогда относительно $f(z)$ получим уравнение $f^{(4v)} + 4v(zf)' = 0$. Оно имеет решения вида $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s z^{4vs}$ с $\alpha_s > 0$.

Поэтому исходное уравнение имеет положительные при $t > 0$ решения $u(x, t)$, для которых справедлива оценка $u(x, t) \geq \alpha x^{4vt} / t^{1+1/(4v)}$ при любом положительном l . Последнее означает, что для уравнения $\partial u / \partial t = -\partial^{4v} u / \partial x^{4v}$ не справедливы факты, изложенные в пп. 3–5.

Киевский политехнический институт

Поступило
21 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, 184, № 5 (1969); 189, № 3 (1969); 190, № 5 (1970); Матем. сборн., 81 (123), 1 (1970). ² Т. Г. Плетнева, С. Д. Эйдельман, ДАН, 192, № 3 (1970); 193, № 4 (1970). ³ Т. Г. Плетнева, С. Д. Эйдельман, В. А. Кондратьев, Матем. сборн., 81 (127), 4 (1971). ⁴ С. Д. Эйдельман, Параболические системы, «Наука», 1964. ⁵ М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман, ДАН, 165, № 3 (1965); Тр. Воронежск. семинара по функциональному анализу, в. 9, 54 (1967); Укр. матем. журн., 22, № 1 (1970). ⁶ M. Krzyżanski, Rev. Roumaine Math. et Appl., 9 (1964). ⁷ D. G. Aronson, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22 (1968). ⁸ C. Folas, M. Nicolescu, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 38 (1965). ⁹ R. Guenther, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967); Riv. Math. Univ. Parma (2), 9 (1968). ¹⁰ R. Johnson, Proc. London Math. Soc., 23, № 2 (1971). ¹¹ J. Chabrowski, Ann. Polon. Math., 19 (1967); 22 (1970); 24 (1971).