

УДК 519.3:62-50

МАТЕМАТИКА

В. И. ПОПОВ

КВАНТОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 28 III 1972)

В этой работе показывается, что привлечение ряда понятий квантовой механики ⁽¹⁾ во многом упрощает формализм асимптотических разложений в методе Л. С. Понтрягина ^(2, 3).

1°. Квантованием m -мерного евклидова пространства в окрестности начала координат назовем отображение его единичного поликруга в тензорное произведение m гильбертовых пространств по формуле

$$x \rightarrow x^+ = (x^0, \dots, x^k, \dots), \quad k \in Z_0 = \{k = (k^1, \dots, k^m): k^n = 0, 1, 2, \dots; n = 1, \dots, m\}, \quad x^k = (x^1)^{k^1} \cdot \dots \cdot (x^m)^{k^m}, \quad (x^n)^0 = 1.$$

Лемма. Если существуют все числа $\{\sigma(x_0, t)\}_k^{\beta} = \partial^{|\beta|} \sigma^{\beta}(x_0, t) / k! (\partial x)^k$, $\beta, k \in Z_0$, $k! = k^1! \cdot \dots \cdot k^m!$, $|\beta| = \beta^1 + \dots + \beta^m = 1$, то разность $h(t)$ двух решений $x(t)$ и $x_0(t)$ динамической системы $dx = \sigma(x, t)dt$, $t_0 \leq t \leq t_1$, разлагается в асимптотический ряд по степеням параметра $\xi = x(t_0) - x_0(t_0)$.

Доказательство. Ввиду дифференцируемости решений динамических систем по начальным данным дифференциал $dh^+ = (\partial h^+ / \partial h^{\beta}) \cdot \{\sigma(x_0(t), t)\}_k^{\beta} h^{\beta} dt = A(t) h^+$ линейно зависит от «вектора состояния» h^+ . Здесь $A(t) = \{\sigma(x_0(t), t)\}_k^{\beta} P_{\beta} Q^k dt$, по β и $k \neq 0$ подразумевается суммирование, P_k и Q^k — матрицы с координатами $\{P_k\}_l^j = \delta_{k+l}^j j! / l!$, $\{Q^k\}_l^j = \delta_l^{k+j}$, $\delta_l^k = 0$ при $k \neq l$, $\delta_l^l = 1$; $j, k, l \in Z_0$. Следовательно, $h^+(t) = S(A, t) \xi^+$ и матрицант

$$S(A, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(A, t) / n!, \quad S_n(A, t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t T[A(t^1) \dots A(t^n)], \quad (1)$$

T — хронологический оператор, переставляющий сомножители в порядке возрастания t . Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Имеют место коммутационные соотношения В. Гейзенберга $Q^i Q_j = Q_{j-2} Q^{i-2}$, $Q^i P_j = l! j! \sum_k P_{j-k} Q^{i-k} / k! (l-k)! (j-k)!$, $0 \leq k^{\beta} \leq a^{\beta} = \min[l^{\beta}, j^{\beta}]$, и представления матриц $P_k = (P^k)^*$, $Q^k = (Q^1)^{k^1} \otimes \dots \otimes (Q^1)^{k^m}$, $Q_k = (Q^k)^*$ через операторы градиента $P = (P^1, \dots, P^1)$ и координат $Q = (Q^1, \dots, Q^1)$. Здесь звездочка — эрмитово сопряжение и $\otimes$ — тензорное произведение матриц.

2°. Пусть теперь динамическая система управляема, $dx = \sigma(x, u)dt$, $u \in F$ и F^{t_1} — класс всех мер μ , определенных на борелевских подмножествах цилиндра $(F, t_1) = F \times [t_0, t_1]$, $\mu(F, t) = t$, $0 = t_0 \leq t \leq t_1$. Ставится задача: найти $\min \text{Re } x^1(t_1)$ на классе D всех пар $x(t)$, μ , удовлетворяющих связям

$$dx = \int_F \sigma(x, u) \mu(du \times dt), \quad \mu \in F^{t_1}, \quad x(t_{\kappa}) \in M_{\kappa}, \quad \kappa = 0, 1. \quad (2)$$

Существование оптимальной пары $x_0(t)$, μ_0 обеспечивается ⁽⁴⁾ условиями леммы Гронуолла и слабой компактности F^{t_1} . Пусть $h(t) = y_1(t) - y_0(t)$, где $y_{\kappa}(t)$ — решение системы (2) с мерой $\nu_{\kappa}(B, t) = \mu_0(B, \tau) + \kappa \mu(B, \theta)$, $B \subset F$, $\mu \in F^{t_1}$, $\kappa = 0, 1$, функции $\theta = \varphi(t)$ и $\tau(t) = t - \theta$ непрерывны и не убыва-

вают, $\varphi(0) = 0$, $y_0(0) = x_0(0)$. Нетрудно проверить, что $y_0(t) \equiv x_0(\tau)$, $h^+(t) = S(A_{\mu_0}, \tau) S(A_{\mu}^{\tau}, \theta) h^+(t_0)$,

$$A_{\mu_0}(\tau) = \int_F \sum_{|k| \geq 1} \sum_{|\beta|=1} \{\sigma(x_0(\tau), u)\}_k^{\beta} P_{\beta} Q^k \mu_0(du \times d\tau), \quad (3)$$

$$A_{\mu}^{\tau}(\theta) = \int_F \sum_{k \in Z_0} \sum_{|\beta|=1} \{\sigma(x_0(\tau), u)\}_k^{\beta} S^{-1}(A_{\mu_0}, \tau) P_{\beta} Q^k S(A_{\mu_0}, \tau) \mu(du \times d\theta), \quad (4)$$

и подкласс Φ' ступенчатых функций из $\Phi = \{\tau(\theta) : \tau = \varphi^{-1}(\theta) - \theta\}$ порождает «игольчатые» вариации ^(3, 5). Этим доказана

Теорема 1. $K \cap L = \phi$, где $K = \{h^+(t_1) = S(A_{\mu_0}, t_1) S(\varepsilon A_{\mu}^{\tau}, t_2) h^+(t_0); \mu \in F^{t_2}, \tau \in \Phi, \varepsilon > 0, \tau(t_2) = t_1\}$, $L = \{h^+ : \operatorname{Re} h^+ \leq 0, x_0(t_1) + h \in M_1\}$.

При том или ином выборе многообразий M_k и слоя F отсюда получаются различные обобщения принципа максимума Л. С. Понтрягина ^(6, 7). Эффективное построение множества достижимости K сводится к решению довольно трудной проблемы моментов ⁽⁸⁾.

3°. Проиллюстрируем теорему 1 примерами динамических систем, связанных с вариациями типа Адамара ^(9, 10).

Общая теория фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений и их систем далеко продвинута ^(11, 12) для всего евклидова пространства E^m и гораздо слабее разработана для произвольных подобластей $B \subset E^m$, хотя первые работы Ж. Адамара появились уже давно.

Идея Адамара состоит в том, чтобы гомотопировать B к некоторой канонической области B_0 , для которой функция Грина G известна, и изучить вариации G при бесконечно малых гомотопиях. Пусть, например, $G(x, z, t)$ — функция Грина первой краевой задачи уравнения Лапласа в области B_i , $0 \in B = B_i \subset B_i \subset B_i$, $0 \leq t' \leq t \leq t_i$. Тогда по принципу максимума для гармонических функций возникает дифференциальное включение

$$dG(x, z, t) / dt \leq 0, \quad x, z \in B_i, \quad (5)$$

лежащее в основании динамической теории фундаментальных решений. Следуя терминологии ⁽¹³⁾, далее нужно построить сечения включения (5), гармонические по x и по z . Это делается по формуле Мартина ⁽¹⁴⁾

$$dG(x, z, t) = \int_{\Delta_i} K(x, u, t) K(z, u, t) \mu(du \times dt), \quad (6)$$

где Δ_i — граница Мартина области B_i и $K(x, u, t) = \lim K(x, z, t) / K(0, z, t)$ при $z \rightarrow u$. Параметр t выберем так, чтобы $\mu(\Delta_i \times dt) = dt$. В более общих ситуациях вместо $K(x, u, t)$ фигурируют граничные функции Грина $G_{\Delta_i}(x, u, t)$ и для не вложенных областей B_i вместо мер — заряды. Мы будем рассматривать так называемые «внутренние» экстремальные задачи, связанные с «квантованием» уравнения (6), т. е. с рассмотрением $(x, z)^+$ и заменой x, z операторами координат. Рассмотрим сначала случай, когда B_0 есть единичный круг в комплексной плоскости C . Тогда $G(0, z, t) = -\ln |w|$, где $w = w(z, t) = ze^{-t} + \dots$ — функция, осуществляющая однолистное конформное отображение B_0 на B_i , и уравнение (6) сводится к уравнению Левнера — Куфарева ^(19, 20)

$$L(w, t) \equiv \int_{\partial B_0} wp(uw) \mu(du \times dt) + dw = 0, \quad p(z) = (1+z)(1-z)^{-1}. \quad (7)$$

Лемма. Каждому $\mu \in (\partial B_0)^+$ отвечает одно и только одно абсолютное непрерывное решение уравнения (7) с начальным условием $w = z \in B_0|_{t=0}$. Это решение однолистно в B_0 , удовлетворяет включению (5) и может быть построено по начальному приближению $w_1 = ze^{-t}$ итерациями $w_{m+1} =$

$$= w_1 - [L(w_m, \tau) - w_m d\tau] e^{\tau-t} \text{ (метод сжатых отображений) или } w_{m+1} =$$

$$= w_m - w_m' \int_0^t L(w_m, t) / w_m' \text{ (метод касательных, } ' = \partial / \partial z).$$

Доказательство. Коэффициенты разложений $w_m(z, t) = c_{m,m} z^m$ с ростом m стабилизируются: $c_{m,m} = c_{m,m+1} = \dots$, а сходимость и однолиственность формальных решений уравнения (7) в B_0 хорошо известны ⁽¹⁵⁾.

Эта лемма дает нам основание называть уравнение (7) локальным сечением включения (5) в окрестности B_0 тривиального решения $w \equiv 0$.

4°. Фиксируем натуральное число N и обозначим N -ю производную вектора $Y(t) = (we^t, w)$ в точке $z = 0$ через $y(t)$. Согласно (7),

$$dY^+ = A_\mu(t) Y^+, \quad A_\mu(t) = \sum_{|\beta|=1} P_\beta Q^\beta \int_{\partial B_0} (\delta_\beta^{1,0} - p(u Q^{0,1})) \mu(du \times dt). \quad (8)$$

Ставится задача Бибераха: найти $\max \operatorname{Re} y^{1,0}(t_1)$ для всех пар $y^+(t)$, μ , удовлетворяющих (8), $y^k(0) = \delta_N^{k,1}$, $\mu \in (\partial B_0)^{t_1}$. Весьма полный обзор по этой задаче дан в добавлении к ⁽¹⁵⁾. Для системы (8) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Для любых $\mu \in (\partial B_0)^{t_1}$, $\tau \in \Phi'$, $\varepsilon > 0$ и оптимальной μ_0

$$\operatorname{Re} \left[\delta^{1,0} S(A_{\mu_0}, t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n S_n(A_{\mu_0}^*, t_2) y^+(0) \right] \leq 0, \quad (9)$$

$$A_\mu(\theta) = S^{-1}(A_{\mu_0}, \tau) A_\mu(\theta) S(A_{\mu_0}, \tau), \quad \delta^\beta = (\delta_\beta^0, \dots, \delta_\beta^k, \dots)^*.$$

В частности, если $\tau \equiv \operatorname{const}$ и $\psi^+(t_1) = \delta^{1,0}$, $d\psi^+(t) = -\psi^+(t) A_{\mu_0}(t)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n H_n(\psi^+(\tau), y^+(\tau), \mu) \leq 0, \quad H_n(\psi^+, y^+, \mu) = \operatorname{Re} \psi^+ S_n(A_{\mu_0}, t_2) y^+.$$

Теорема 3. $H_n(\psi^+(\tau), y^+(\tau), \mu) \leq 0$ при $\mu \in \{\mu: H_n(\psi^+(\tau), y^+(\tau), \mu) = 0, m = 1, \dots, n-1\}$.

Этими теоремами даны необходимые условия оптимальности произвольного порядка n . Случай $n = 1$ подробно изучался в ⁽¹⁶⁾.

5°. Несмотря на то, что задачи, подобные рассмотренной в 4°, для общего уравнения (6) будут еще сложнее, изучение их может дать весьма интересные полугруппы фундаментальных решений, геометрические свойства которых заложены в дифференциальных инвариантах функций H_n . Другой подход, связанный со специальным продолжением $K(x, u, t)$ по u внутри B_i и переходом от интеграла по Δ_i к интегралу по B_i , развит М. Шиффером ⁽¹⁷⁾. Полученные им критерии оптимальности выводятся и из принципа максимума Л. С. Понтрягина ^(16, 18).

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
28 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Дж. Макки, Лекции по математическим основам квантовой механики, М., 1965. ² В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, ДАН, 110, № 1 (1956). ³ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. ⁴ А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Тр. Московск. матем. общ., 18 (1968). ⁵ Р. Габасов, Дифференциальные уравнения, 4, № 6 (1968). ⁶ Р. Габасов, Автоматика и телемеханика, 28, № 8 (1967). ⁷ Р. Габасов, В. А. Сроко, Дифференциальные уравнения, 6, № 2 (1970). ⁸ Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., 1961. ⁹ J. Hadamard, Mem. Savants Estrangers Akad. Sci. France, Ser. 2, 33, № 4 (1908). ¹⁰ J. Hadamard, Lecons sur le calcul des variations, Paris, 1910. ¹¹ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958. ¹² В. П. Паламонов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967. ¹³ В. Г. Болтянский, Математическая теория оптимальных процессов, М., 1969. ¹⁴ R. S. Martin, Trans. Am. Math. Soc., 49 (1941). ¹⁵ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966. ¹⁶ В. П. Попов, ДАН, 188, № 3 (1969). ¹⁷ Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953. ¹⁸ G. S. Goudman, Тез. Междунаро. конгр., матем. секция 10, М., 1966. ¹⁹ K. Lowner, Math. Ann., 89, 103 (1923). ²⁰ П. П. Куфарев, Ученые записки Томск. унив., 5, 20 (1947).