

УДК 517.433

МАТЕМАТИКА

В. В. АНШЕЛЕВИЧ

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В «НЕКОММУТАТИВНОЙ» ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 V 1972)

1. Хорошо известна глубокая аналогия между объектами квантовой статистической механики и классической теории вероятностей. В квантовой статистической механике совокупностью случайных величин служит некоторая, вообще говоря некоммутативная, C^* -алгебра, а роль математического ожидания играет положительный нормированный функционал на ней, называемый состоянием. Эта заметка посвящена изучению центральной предельной теоремы для некоммутативного аналога стационарного случайного процесса и некоторым ее применениям к квантовой статистической механике.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ есть C^* -алгебра с единицей ограниченных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Определение 1. Пусть S — симметрический автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, ω — состояние на $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что ω инвариантно относительно S , если $\omega(Sx) = \omega(x)$ для любого $x \in \mathfrak{A}$.

Пусть $a \in \mathfrak{A}$ — эрмитов элемент, J — подмножество множества целых чисел Z . Тогда $\mathfrak{A}_a(J)$ будет обозначать минимальную C^* -подалгебру с единицей, содержащую множество $\{S^j a; j \in J\}$.

Я. Г. Синай предложил следующую формулировку центральной предельной теоремы для симметрического автоморфизма S . Пусть a — эрмитов элемент из $\mathfrak{A}$, ω — состояние на $\mathfrak{A}$, инвариантное относительно S и ультраслабонепрерывное на $\mathfrak{A}_a(J)$ для каждого конечного множества $J \subset Z$, $p_a^{(N)}(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, отвечающее оператору

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (S^j a - \omega(a)).$$

Определение 2. Элемент a удовлетворяет центральной предельной теореме относительно S и ω , если

$$\text{а) существует } \lim_{N \rightarrow +\infty} \omega \left(\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N (S^j a - \omega(a)) \right)^2 \right) = d;$$

$$\text{б) при } N \rightarrow +\infty$$

$$\bar{\omega}(p_a^{(N)}(\lambda)) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/(2d)} du, & \text{если } d > 0; \\ 0, & \lambda < 0, \\ 1, & \lambda > 0, \end{cases} \quad \text{если } d = 0,$$

где $\bar{\omega}$ — ультраслабонепрерывное продолжение ω на $\mathfrak{A}_a([1, N])$.

В классической теории вероятностей центральная предельная теорема доказывается при наложении тех или иных ограничений на характер перемешивания соответствующего автоморфизма пространства с мерой, называемых условиями регулярности. Вводимое ниже условие равномерно перемешивания для симметрического автоморфизма C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ явля-

ется аналогом условия полной регулярности стационарного случайного процесса (см. (1)).

Определение 3. Пусть ω — состояние на $\mathfrak{A}$, инвариантное относительно S . Будем говорить, что $(\mathfrak{A}, a, S, \omega)$ удовлетворяют условию равномерного перемешивания, если для любого целого $n > 0$, для любых $x \in \mathfrak{B}_a((-\infty, 0])$ и $y \in \mathfrak{B}_a([n+1, +\infty))$ выполняется неравенство

$$|\omega(xy) - \omega(x)\omega(y)| < \alpha(n)\|x\| \cdot \|y\|,$$

причем $\alpha(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Более слабые, но сходные требования вводились Пауэрсом в связи с задачами теории факторов (см. (2)).

Определение 4. Пусть ω — состояние на $\mathfrak{A}$, инвариантное относительно S . Будем говорить, что $(\mathfrak{A}, a, S, \omega)$ удовлетворяют условию асимптотической коммутативности, если для любого целого $n > 0$, любых $x \in \mathfrak{B}_a((-\infty, 0])$ и $y \in \mathfrak{B}_a([n+1, +\infty))$ выполняется неравенство

$$\|xy - yx\|_\omega < \beta(n)\|x\| \cdot \|y\|,$$

причем $\beta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Здесь $\|z\|_\omega = \sqrt{\omega(z^*z)}$.

Теорема 1. Для того чтобы эрмитов элемент a удовлетворял центральной предельной теореме относительно S и ω , достаточно, чтобы $(\mathfrak{A}, a, S, \omega)$ удовлетворяли:

а) условию равномерного перемешивания, причем $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha(n) < +\infty$;

б) условию асимптотической коммутативности с $\beta(n) = \text{const} \cdot e^{-n\gamma(n)}$, где $\gamma(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

3. Приведем теперь одно применение теоремы 1 к квантовой статистической механике. Пусть $\mathfrak{A}_0$ — алгебра локальных, $\mathfrak{A}$ — C^* -алгебра квазилокальных наблюдаемых одномерной квантовой спиновой системы, m — размерность пространства состояний узла решетки, S — симметрический автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$, порожденный сдвигом решетки $j \rightarrow j+1$ (см. (3)). В работе Араки (4) доказано, что для любого финитного потенциала Φ существует инвариантное относительно S состояние φ_Φ на алгебре $\mathfrak{A}$, являющееся термодинамическим пределом состояний Гиббса в конечных объемах.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть Φ — финитный потенциал одномерной квантовой спиновой системы, φ_Φ — состояние на алгебре $\mathfrak{A}$, построенное Араки в (4).

Тогда любой эрмитов элемент $a \in \mathfrak{A}_0$ удовлетворяет центральной предельной теореме относительно S и φ_Φ .

Теорема 2 является простым следствием теоремы 1 и следующей леммы.

Лемма. Пусть Φ и φ_Φ — такие же, как в теореме 2, $\mathfrak{A}(J)$ есть C^* -подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, отвечающая объему J . Существуют постоянные $c > 0$ и $\alpha > 0$, зависящие только от потенциала Φ , такие, что для любого целого $n > 0$, любых $x \in \mathfrak{A}((-\infty, 0])$ и $y \in \mathfrak{A}([n+1, +\infty))$ выполняется неравенство

$$|\varphi_\Phi(xy) - \varphi_\Phi(x)\varphi_\Phi(y)| < ce^{-\alpha n}\|x\| \cdot \|y\|.$$

Доказательство этой леммы использует методику, разработанную Араки в работе (4).

4. Пусть Φ и Ψ — финитные потенциалы одномерной квантовой спиновой системы, φ_Φ — состояние Араки для потенциала Φ , $H_\Psi(0, N)$ —

гамильтониан, построенный по потенциалу Ψ для объема $[0, N]$, r — радиус взаимодействия потенциала Ψ . Существует эрмитов элемент $a_\Psi \in \mathfrak{A}([0, r])$ такой, что $H_\Psi(0, N) = \sum_{n=0}^{N-r} S^n a_\Psi + \Delta_N$, где $\|\Delta_N\| < c_\Psi$, c_Ψ — постоянная, не зависящая от N .

Пусть $H_\Psi(0, N) = \sum_i \lambda_i^{(N)} E_i^{(N)}$ — спектральное разложение оператора $H_\Psi(0, N)$, $p_j^{(N)} = \varphi_\Phi(E_j^{(N)})$, $v_N(\xi_1, \xi_2) = \sum_j p_j^{(N)}$, где сумма берется по всем j таким, что $\lambda_j^{(N)} \in [\sum_i \lambda_i^{(N)} p_i^{(N)} + \xi_1 \sqrt{N}, \sum_i \lambda_i^{(N)} p_i^{(N)} + \xi_2 \sqrt{N}]$. Применение теоремы 2 к a_Ψ , S и φ_Φ дает, что $v_N(\xi_1, \xi_2)$ имеет асимптотически нормальное распределение, т. е. в зависимости от потенциалов Φ и Ψ возможны два и только два случая:

$$\text{а) } v_N(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-u^2/(2d)} du$$

при $N \rightarrow +\infty$ для любых ξ_1 и ξ_2 , где d — положительный параметр, зависящий от потенциалов Φ и Ψ ;

$$\text{б) } v_N(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_1 \xi_2 > 0, \\ 1, & \text{если } \xi_1 \xi_2 < 0, \end{cases}$$

при $N \rightarrow +\infty$ для $\xi_1 \xi_2 \neq 0$.

Положим теперь $\Phi = 0$, тогда $\varphi_\Phi(x) = \frac{1}{m^{N+1}} \text{tr } x$ для $x \in \mathfrak{A}([0, N])$. $\sum_i \lambda_i^{(N)} p_i^{(N)} = \lambda^{(N)}$ есть среднее арифметическое собственных чисел оператора $H_\Psi(0, N)$ с учетом их кратности, $v_N(\xi_1, \xi_2)$ — относительное количество собственных чисел гамильтониана $H_\Psi(0, N)$, лежащих в отрезке $[\lambda^{(N)} + \xi_1 \sqrt{N}, \lambda^{(N)} + \xi_2 \sqrt{N}]$, если каждое собственное число считать столько раз, какова его кратность. Следовательно, собственные числа гамильтониана $H_\Psi(0, N)$ для финитного потенциала Ψ имеют асимптотически нормальное распределение.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность Я. Г. Синаю за постановку задачи и полезные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. А. Розапов, Стационарные случайные процессы, М., 1963. ² R. T. Powers, Ann. Math., 86, № 1, 138 (1967). ³ Д. Рюэль, Статистическая механика, Строгие результаты, М., 1971. ⁴ H. Araki, Comm. Math. Phys., 14, № 2, 120 (1969).