Э. МУХАМАДИЕВ

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 V 1972)

В работе рассматривается вопрос о существовании периодических решений у одного класса нелинейных систем уравнений эллиптического типа. Изучение проводится при помощи перехода к уравнениям с вполне непрерывными операторами и применением общих топологических методов (см. (1-3)). Полученные утверждения дополняют соответствующие результаты по теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (3, 4)).

1. Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\sum_{|p|=r} A_p(x) \frac{\partial^{l^p} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} = F(x, u, u', \dots, u^{(r-1)}); \quad (1)$$

здесь $A_p(x)$ — квадратные матрицы порядка m , элементы которых суть непрерывные по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ функции; $u^{(i)}$ — производная i -го порядка отображения $u: R^n \rightarrow R^m$; F — непрерывная по Гёльдеру с показателем $\beta \in (\alpha, 1)$ по совокупности переменных вектор-функция.

Предположим, что функция F и коэффициенты оператора

$$Lu \equiv \sum_{|p|=r} A_p(x) \frac{\partial^{l^p} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}},$$

т. е. матрицы $A_p(x)$, периодичны по всем переменным $(x_1, \dots, x_n) = x$. Не ограничивая общности, можно считать, что все периоды равны между собой. Их общий период обозначим через ω . Пусть далее, дифференциальный оператор L является эллиптическим по Петровскому, т. е.

$$\det \sum_{|p|=r} A_p(x) \xi^p \neq 0 \quad \text{при } \theta \neq \xi \in R^n, \quad \xi^p = \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n}.$$

Обозначим через $C_{r+\alpha}^\omega = C_{r+\alpha}^\omega(R^n, R^m)$ пространство r раз непрерывно дифференцируемых ω -периодических по всем переменным вектор-функций $u: R^n \rightarrow R^m$, r -я производная которых непрерывна по Гёльдеру с показателем α . Очевидно, линейный оператор L действует из пространства $C_{r+\alpha}^\omega$ в пространство $C_{\alpha}^\omega = C_{0+\alpha}^\omega$ и непрерывен в естественной топологии пространств $C_{r+\alpha}^\omega$ и C_{α}^ω . В дальнейшем будем предполагать, что L является оператором нулевого индекса, т. е. $\dim \text{Ker } L = \dim \text{Coker } L$. Это условие выполняется, например, в следующих случаях: L — оператор с постоянными коэффициентами; n — нечетное число; $m < n$ (см. (6)). Как известно (см., например, (3)), если L — оператор нулевого индекса, то существует такой линейный конечномерный оператор $B: C_{r+\alpha}^\omega \rightarrow C_{\alpha}^\omega$, что оператор $L + B$ имеет ограниченный обратный $(L + B)^{-1}: C_{\alpha}^\omega \rightarrow C_{r+\alpha}^\omega$. Производя замену $u = Cv \equiv (L + B)^{-1}v$ в уравнении (1), при сделанных предположениях получим эквивалентное уравнение

$$v = Bv + F[x, Cv, (Cv)', \dots, (Cv)^{(r-1)}] \quad (2)$$

в пространстве C_{α}^ω . Нетрудно видеть, что из условия $\alpha < \beta$ вытекает, что

оператор

$$Av = BCv + F[x, Cv, (Cv)', \dots, (Cv)^{(r-1)}]$$

действует и вполне непрерывен в пространстве C_{α^0} ; поэтому уравнение (2) порождает вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi v = v - Av, \quad (3)$$

нули которого и только они являются решениями уравнения (2).

2. Пусть вектор-функция F допускает представление:

$$F(x, u, u', \dots, u^{(r-1)}) = P(x, u, u', \dots, u^{(r-1)}) + f(x, u, u', \dots, u^{(r-1)}), \quad (4)$$

где P и f непрерывны по Гёльдеру с показателем β по совокупности переменных, причем при некоторых $k > 0$ и $\gamma = (k-1)/r$ выполнены условия

$$P(x, \lambda u, \lambda^{1+\gamma} u', \dots, \lambda^{1+(r-1)\gamma} u^{(r-1)}) = \lambda^k P(x, u, u', \dots, u^{(r-1)}), \quad \lambda \geq 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \sup_{x, \|u^{(i)}\| \leq 1} \|f(x, \lambda u, \lambda^{1+\gamma} u', \dots, \lambda^{1+(r-1)\gamma} u^{(r-1)})\| = 0.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\sum_{|p|=r} A_p(x) \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} = P(x, u, u', \dots, u^{(r-1)}) \quad (5)$$

и ограничимся рассмотрением случая $k \geq 1$.

Систему (5) назовем (r, k) -системой, если.

а) при $k > 1$ система

$$\sum_{|p|=r} A_p(x_0) \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} = P(x_0, u, u', \dots, u^{(r-1)})$$

при каждой $x \in R^n$ не имеет ненулевых ограниченных на всем пространстве вместе со всеми производными до порядка r решений;

б) при $k = 1$ система (5) не имеет ненулевых решений в $C_{r+\alpha}^{\omega}$.

Определим оператор A_0 равенством

$$A_0 v = BCv + P[x, Cv, (Cv)', \dots, (Cv)^{(r-1)}]$$

и рассмотрим в пространстве C_{α^0} вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi_0 v = v - A_0 v. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть вектор-функция F допускает представление (4), а система (5) является (r, k) -системой.

Тогда вполне непрерывные векторные поля (3) и (6) не имеют нулевых векторов на сферах достаточно больших радиусов пространства C_{α^0} и их вращения $\gamma(\Phi, \infty)$ и $\gamma(\Phi_0, \infty)$ на этих сферах совпадают: $\gamma(\Phi, \infty) = \gamma(\Phi_0, \infty)$.

3. Теорема 1 позволяет сводить вычисление вращения векторного поля (3) к вычислению вращения более простого векторного поля (6). Укажем теперь некоторые формулы для вычисления вращения поля (6).

Предположим, что коэффициенты $A_p(x)$ оператора L не зависят от x . Тогда, как мы отметили выше, $\text{ind } L = 0$. Обозначим через M оператор проектирования, сопоставляющий каждой вектор-функции $u \in C_{\alpha^0}$ ее среднее. Очевидно, M является проектором и в пространстве $C_{r+\alpha}^{\omega}$. Нетрудно видеть, что ядро оператора L состоит из всех постоянных вектор-функций, т. е. совпадает с областью значений оператора M , причем $ML = LM = 0$. Поэтому оператор $L + M: C_{r+\alpha}^{\omega} \rightarrow C_{\alpha^0}$ имеет ограниченный обратный $(L + M)^{-1} = C$, причем $MC = M$. В этом случае оператор A_0 имеет вид

$$A_0 v = Mv + P[x, Cv, (Cv)', \dots, (Cv)^{(r-1)}], \quad C = (L + M)^{-1}.$$

Теорема 2. Пусть уравнение (4) не имеет ненулевых решений в $C_{r+\alpha}^\omega$ и $k > 1$. Пусть нулевая особая точка конечномерного поля

$$\Psi u = -MP(x, u, 0, \dots, 0) \quad (7)$$

изолирована.

Тогда вращение $\gamma(\Phi_0, \infty)$ поля (6) на сферах достаточно больших радиусов совпадает с индексом $\gamma(\Phi, \theta)$ нуля поля Ψ .

4. Из теорем 1, 2 и общих топологических принципов (см. (2)) следуют различные признаки существования периодических решений у системы (1).

Теорема 3. Пусть система (4) является (r, k) -системой. Пусть вращение $\gamma(\Phi_0, \infty)$ поля Φ_0 отлично от нуля: (например, вектор-функция P нечетна: $P(x, -u, -u', \dots, u^{(r-1)}) = -P(x, u, \dots, u^{(r-1)})$).

Тогда система (1) имеет хотя бы одно решение в пространстве $C_{r+\alpha}^\omega$.

Теорема 4. Пусть система (4) является (r, k) -системой и удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть индекс нуля $\gamma(\Psi, \theta)$ конечномерного поля Ψ отличен от нуля.

Тогда система (1) имеет хотя бы одно решение в пространстве $C_{r+\alpha}^\omega$.

Используя теоремы 1, 2 можно получить достаточные условия существования вторых решений системы (1), если известно некоторое решение этой системы. Для простоты будем считать, что известно нулевое решение системы (1), т. е. $f(x, 0, \dots, 0) \equiv 0$.

Теорема 5. Пусть система (4) является (r, k) -системой. Пусть нулевая особая точка поля (3) изолирована и ее индекс $\gamma(\Phi, \theta)$ отличен от $\gamma(\Phi_0, \infty)$.

Тогда система (1) имеет хотя бы одно ненулевое решение в пространстве $C_{r+\alpha}^\omega$.

5. В заключение приведем примеры (r, k) -систем. Вначале рассмотрим случай, когда u и x — скаляры. Уравнения

$$u^{(IV)} = u'u^3 - u^5, \quad r = 4, k = 5, \quad (8)$$

$$u^{(III)} = u'^2 + uu'' + u^4, \quad r = 3, k = 4, \quad (9)$$

$$u^{(VI)} = 4uu'u'' + u^3u''' + u^7, \quad r = 6, k = 7, \quad (10)$$

являются (r, k) -уравнениями при $(r, k) = (4, 5), (3, 6), (6, 7)$ соответственно и, так как правая часть у них не зависит от независимой переменной x , удовлетворяют условию теоремы 2. Следовательно, вращение $\gamma(\Phi, \infty)$ соответствующего поля (6) на сферах достаточно больших радиусов совпадает с индексом $\gamma(\Phi_0, \theta)$ его нулевой особой точки. Нетрудно видеть, что индекс $\gamma(\Phi_0, \theta)$ равен 1, 0, -1 соответственно для полей, отвечающих уравнениям (8), (9), (10).

Приведем еще пример (r, k) -системы. Пусть

$$Lu \equiv \Delta^2 u, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 / \partial x_n^2,$$

$$P(x, u, u', \dots, u^{(3)}) = (\Delta u)^{2/7} + u^6.$$

С помощью принципа максимума нетрудно проверить, что уравнение

$$\Delta^2 u = (\Delta u)^{2/7} + u^6$$

является $(4, 6)$ -системой.

Автор выражает искреннюю благодарность М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
18 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ж. Лере, Ю. Шаудер, УМН, 1, № 3—4 (1946). ² М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956. ³ М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений, «Наука», 1966. ⁴ Э. Мухамадиев, ДАН, 194, № 3 (1970). ⁵ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. ⁶ М. Ф. Атья, И. М. Зингер, УМН, 24, в. 1 (1969).