

В. Г. РОМАНОВ

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 29 III 1972)

Пусть A — нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в линейное нормированное пространство Y . Рассмотрим элемент $x_0 \in X$ и пусть $y_0 \in Y$ — его образ в пространстве Y , т. е. $y_0 = Ax_0$. При этом представляют существенный интерес два вопроса: 1) есть ли в пространстве X другие элементы x , образ которых совпадает с y_0 , т. е. единственно ли решение уравнения

$$Ax = y_0; \quad (1)$$

2) если решение уравнения (1) единственно, то будет ли оно непрерывно зависеть от изменения y_0 ?

В случае, если оператор A обладает некоторыми хорошими свойствами, а именно, если существует в некоторой окрестности точки x_0 производная Фреше A'_{x_0} , ограниченная и непрерывная, и существует ограниченный обратный оператор $[A'_{x_0}]^{-1}$, ответ на эти два вопроса дает теорема о существовании обратного оператора A^{-1} (см., например, ⁽¹⁾). Однако довольно часто встречаются важные задачи, когда оператор $[A'_{x_0}]^{-1}$ хотя и существует, но является неограниченным. Подобная ситуация характерна, например, для многих обратных задач для дифференциальных уравнений ⁽²⁻⁵⁾. В этом случае задача решения уравнения (1) является, вообще говоря, классически некорректной, так как нет в обычном смысле непрерывной зависимости решения от правой части. А. Н. Тихонов ⁽²⁾ предложил для задач подобного рода изменить понятие корректности задачи. Подход А. Н. Тихонова к понятию корректности заключается в следующем: рассматривается множество $m \subset X$ и его образ R в пространстве Y при отображении с помощью оператора A : $R = Am$. Задача решения уравнения $Ax = y$ называется корректной на множестве m если: 1) множество $R \subset Y$ не пусто и $y \in Y$; 2) решение уравнения $Ax = y$ единственно на множестве m ; 3) решение этого уравнения устойчиво к малым вариациям y на множестве R . Условия 1) — 3) естественным образом обобщают классические требования существования, единственности и устойчивости, предъявляемые к корректной задаче. В данной заметке мы выделяем класс таких компактных множеств m , связанных с точкой x_0 , на которых задача решения уравнения (1) при достаточно общих предположениях относительно оператора A оказывается корректной по А. Н. Тихонову. Этим и дается ответ на вопросы, поставленные в самом начале.

Определение. Множество $m \subset X$ называется локально подобным относительно элемента x_0 , если существует такой замкнутый шар $S(x_0, r) \subset X$ с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$, что множество $m \cap S(x_0, r)$ не пусто и из $x \in m \cap S(x_0, r)$ следует, что элемент $\bar{x} = \left(x_0 + \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} r \right)$ также принадлежит $m \cap S(x_0, r)$.

Как видно из определения локально подобного множества, для него характерно, что наряду с элементами $x \in m$, содержащимися внутри шара $S(x_0, r)$, содержатся во множестве m и элементы $\bar{x}$, которые получаются с помощью подобного проектирования элементов x на поверхность сферы

$S(x_0, r)$ относительно центра подобия, находящегося в точке x_0 . Действительно, $\|\bar{x} - x_0\| = r$.

Отсюда ясно, что такие множества, как замкнутая сфера с центром в точке x_0 и замкнутый отрезок прямой, соединяющий пару точек x_0, x , являются множествами, локально подобными относительно элемента x_0 .

В дальнейшем мы будем рассматривать компактные в X , локально подобные относительно элемента x_0 множества. Широкий класс таких множеств можно получить следующим построением: возьмем замкнутый шар $S(x_0, r)$ и компактное множество m_0 элементов x , лежащих на поверхности шара: $\|x - x_0\| = r$, и построим отрезки прямых, соединяющие точки x_0, x для всех $x \in m_0$; тогда множество m , получающееся в результате объединения всех таких отрезков $[x_0, x]$, $x \in m_0$, является компактным в X , локально подобным относительно элемента x_0 множеством. Пусть, например, $X = C(D)$, где D — замкнутая область евклидова пространства E^n , тогда множество функций $x \in C(D)$, для которых имеют место неравенства

$$\|x - x_0\|_C \leq r, \quad (2)$$

$$\|\text{grad}(x - x_0)\|_C \leq K\|x - x_0\|_C, \quad K > 0,$$

является компактным в $C(D)$, локально подобным относительно элемента x_0 множеством.

Лемма. Пусть линейный оператор B , определенный на банаховом пространстве X , с областью значений в линейном нормированном пространстве Y обладает следующими свойствами: 1) оператор B непрерывен, 2) уравнение $Bx = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$.

Тогда на любом компактном в X , локально подобном относительно элемента $x_0 \in X$ множестве m имеет место оценка

$$\|B(x - x_0)\| \geq \alpha\|x - x_0\|, \quad (3)$$

где α — положительная постоянная, зависящая только от множества m .

Лемма остается справедливой, если оператор B обладает свойствами 1) и 2) только на замыкании множества m .

На основании этой леммы легко устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть нелинейный оператор A имеет в точке x_0 производную Фреше A_{x_0}' , удовлетворяющую условиям леммы.

Тогда для любого компактного, локально подобного относительно элемента x_0 множества m существует такой замкнутый шар $S(x_0, r)$, $r > 0$, что на множестве $m \cap S(x_0, r)$, $r > 0$, имеет место неравенство

$$\|Ax - Ax_0\| \geq \gamma\|x - x_0\|, \quad (4)$$

где γ — некоторая положительная постоянная.

Теорема 2. Пусть по отношению к оператору $A[X \rightarrow Y]$ выполнены условия теоремы 1, тогда для каждого компактного, локально подобного относительно элемента x_0 множества существует такой замкнутый шар $S(x_0, r)$, $r > 0$, что на множестве $m_r = m \cap S(x_0, r)$ решение уравнения (1) единственно и устойчиво по отношению к малым вариациям y_0 на множестве $R = At_r \subset Y$.

Из последней теоремы следует, что задача решения уравнения (1) на множестве m_r корректна по А. Н. Тихонову. Отметим еще одно следствие из этой теоремы.

Следствие. Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1, то существует такое звездное относительно элемента x_0 множество $M(x_0)$, содержащее в себе элементы $x \in X$ по любому направлению, выходящему из x_0 , на котором решение уравнения (1) единственно.

Изложенные выше результаты являются некоторым оправданием метода линеаризации, часто применяемого при решении классически некор-

ректных нелинейных задач. При исследовании, например, многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений (задач, как правило, нелинейных) разумно исследовать на корректность более простую задачу, получающуюся линеаризацией исходной задачи. Полученные при этом выводы могут служить основанием для соответствующих выводов относительно корректности нелинейной задачи.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Наука, 1965, стр. 441—444. ² А. Н. Тихонов, ДАН, 38, № 5, 195 (1943). ³ М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962. ⁴ М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, В. Г. Васильев, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, «Наука», 1969. ⁵ В. Г. Романов, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, «Наука», 1969.