

С. С. РЫШКОВ

**О ПРИВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ
ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ ПО ЭРМИТУ, ПО МИНКОВСКОМУ
И ПО ВЕНКОВУ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 III 1972)

1°. В 1850 г. Эрмит ⁽¹⁾, см. также ^(2, 3), предложил способ приведения положительных квадратичных форм от n переменных. Этому приведению, см., например, ⁽³⁾, в пространстве коэффициентов соответствует некоторая область $\mathcal{H}^*$ — область Эрмита. Минковский ^(4, 5) в 1903 г. доказал, что область $\mathcal{H}^*$ есть бесконечная выпуклая пирамида с конечным числом плоских граней и вершиной в начале координат (бесконечный конус над ограниченным конечногранным выпуклым многогранником). Для доказательства Минковский построил свою область $\mathcal{M}^*$, являющуюся замыканием области $\mathcal{H}^*$ относительно конуса положительности.

В 1940 г. Б. А. Венков ⁽⁶⁾ дал метод построения при $n > 2$ бесконечного числа таких попарно неэквивалентных конечногранных пирамид приведения $\mathcal{V}_\varphi$. Параметром, от которого зависит область Венкова, является произвольная положительная квадратичная форма φ от n переменных.

Естественно встает вопрос, не есть ли область Минковского частный случай области приведения Венкова. Как сообщили автору Б. Н. Делоне и А. В. Малышев, этот вопрос интересовал и самого Б. А. Венкова. Кроме того, Ван-дер-Варден ⁽²⁾, стр. 267, заметил, что вопрос о полном совпадении областей $\mathcal{H}^*$ и $\mathcal{M}^*$, т. е. о замкнутости $\mathcal{H}^*$, при $n > 2$ не был решен.

Автору в ⁽³⁾ удалось показать, что вопросы эти тесно связаны между собой, а именно, что область $\mathcal{H}^*$ (область $\mathcal{H}$) полностью совпадает с областью $\mathcal{M}^*$ (областью $\mathcal{M}$) тогда и только тогда, когда область $\mathcal{M}$ совпадает с областью $\mathcal{V}$. Здесь через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ обозначены ⁽³⁾ симметризованные группой куба области $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{H}^*$ соответственно, а через $\mathcal{V}$ обозначена область $\mathcal{V}_\varphi$ при $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Было показано, что эти совпадения имеют место при $n \leq 5$ и не имеют места при $n \geq 11$. При $n = 6, 7, 8, 9, 10$ этот вопрос оставался открытым. В той же работе автора было показано, что геометрический смысл приведения по Венкову в область $\mathcal{V}$ есть выбор основного репера заданной решетки, имеющего наименьшую сумму квадратов длин векторов. В дальнейшем, для краткости, мы будем именовать приведением по Венкову именно этот частный случай, а приведением по Эрмиту и по Минковскому — соответственно приведение в область $\mathcal{H}$ или $\mathcal{M}$.

12 III 1972 г. автор получил от проф. Барнса (E. S. Barnes) письмо, в котором было указано на опечатку в работе ⁽³⁾, а именно, в форме из теоремы 2 коэффициент при x_{10} равен $2/3$, а не $1/3$. В том же письме проф. Барнс сообщил автору две квадратичные формы f_9 и f_{10} от 9 и 10 переменных соответственно, приведенных по Минковскому, но не приведенных по Эрмиту.

С другой стороны, автору стал известен результат П. П. Таммелы ⁽⁷⁾, в силу которого при $n = 6$ области $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}$ совпадают. Таким образом, вопрос оставался неясным только для $n = 7$ и для $n = 8$.

Все это побудило автора вновь вернуться к рассматриваемому вопросу и предложить следующие теоремы, см. п. 2° и 3°.

2°. Теорема 1. Области приведения $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ (а также области приведения $\mathcal{H}^*$ и $\mathcal{M}^*$) полностью совпадают при каждом $n \leq 6$ и различны для любого $n \geq 7$.

Теорема 2. Области приведения $\mathcal{V}$ и $\mathcal{M}$ совпадают при каждом $n \leq 6$ и различны (являются существенно различными многогранными пирамидами) при $n \geq 7$.

Первые части этих теорем фактически доказаны в работах ^(3, 7). Вторая часть любой из этих двух теорем следует из второй части другой теоремы в силу теоремы 1 из ^(3, 8), однако они обе доказываются и без использования цитированной теоремы, являясь соответственно следствием таких двух лемм.

Л е м м а 1. Положительная квадратичная форма

$$\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + (1 - \alpha)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + x_6^2 + \\ + (17/6 - 2\alpha)x_7^2 + (19/6 - 5/2\alpha)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_7 + \\ + (19/6 - 8/3\alpha)x_5x_7 + x_6x_7 + 7x_8^2 + 7x_9^2 + \dots + 7x_n^2, \quad {}^{13/15} < \alpha < {}^{11/12}, \quad (1)$$

приведена по Минковскому, но не приведена по Эрмиту.

Л е м м а 2. Положительная квадратичная форма

$$7/8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + 1/8(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + x_6^2 + \\ + (13/12 + 0,0011 - \gamma + \gamma^2)x_7^2 + 47/48(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_7 + 5/6x_5x_6 + \\ + (1 - 2\gamma)x_6x_7 + 7x_8^2 + 7x_9^2 + \dots + 7x_n^2 + \psi \quad (2)$$

приведена по Минковскому и по Эрмиту, но не приведена по Венкову. Напротив, положительная квадратичная форма

$$7/8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + 1/8(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + \\ + (1,0044 + 4\gamma^2)x_6^2 + (1,0099 - 3\gamma + 9\gamma^2)x_7^2 - 19/24(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_6 + \\ + 2/3x_5x_6 - 1/16(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_7 - 1/2x_5x_7 + (3/4 + 0,0132 - \\ - 4\gamma + 12\gamma^2)x_6x_7 + 7x_8^2 + 7x_9^2 + \dots + 7x_n^2 + \psi. \quad (3)$$

приведена по Венкову, но не приведена ни по Эрмиту, ни по Минковскому. (В формулах (2) и (3) через ψ обозначена произвольная квадратичная форма от n переменных с достаточно малыми коэффициентами, а $\gamma = 10^{-10}$.)

Очевидно, что эти леммы достаточно доказать лишь при $n = 7$. Делается это при помощи следующих геометрических конструкций. Рассмотрим репер $A(a_1, a_2, \dots, a_7)$ с метрической квадратичной формой

$$\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + (1 - \alpha)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + x_6^2 + \beta x_7^2, \quad (4)$$

где ${}^{13/15} < \alpha < {}^{11/12}$ и $\beta = 1$. Зададим далее векторы нового репера $E_\gamma(e_1, e_2, \dots, e_7)$ следующим образом:

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = a_2, \dots, \quad e_6 = a_6, \quad e_7 = 1/3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \\ + 1/4a_5 + (1/2 - \gamma)a_6 + 1/12\sqrt{11}a_7.$$

Репер E_0 имеет своей метрической формой квадратичную форму (4), в которой положено $n = 7$. Обозначим через Γ решетку, построенную на репере E_0 , и найдем все ее векторы минимальной длины. Для этого заметим, во-первых, что на решетке Γ' , построенной на векторах $e_1, e_2, \dots, e_6$, только векторы $\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_6$ имеют длину 1, остальные же имеют длину по крайней мере $2\alpha > {}^{26/15}$.

Таким образом, меньший вектор, исходящий из начала координат, если такой есть, должен кончаться в одном из слоев решетки Γ , параллельных подпространству, несущему решетку Γ' . В силу того, что $1/12\sqrt{11} > 1/4$, этот слой не может быть далее чем третьим.

Рассмотрим первый слой. Все векторы, идущие в него из начала, имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3} + m_1\right)a_1 + \left(\frac{1}{3} + m_2\right)a_2 + \left(\frac{1}{3} + m_3\right)a_3 + \left(\frac{1}{3} + m_4\right)a_4 + \\ & + \left(\frac{1}{4} + m_5\right)a_5 + \left(\frac{1}{2} + m_6\right)a_6 + \frac{1}{12}\sqrt{11}a_7 = e_7 + a', \end{aligned}$$

где $m_1, m_2, \dots, m_6$ — целые числа, т. е. $a' \in \Gamma'$. Подстановкой координат этого вектора (относительно репера A) в форму (4) убеждаемся, что наименьшая длина его получается при $a' = 0$ (или $a' = -a_6$) и равна $\frac{17}{6} - 2\alpha > 1$.

Рассмотрим второй слой. Соответствующие векторы удобно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{3} + m_1\right)a_1 + \left(-\frac{1}{3} + m_2\right)a_2 + \left(-\frac{1}{3} + m_3\right)a_3 + \left(-\frac{1}{3} + m_4\right)a_4 + \\ & + \left(\frac{1}{2} + m_5\right)a_5 + m_6a_6 + \frac{2}{12}\sqrt{11}a_7 = e_6^* + a', \end{aligned}$$

где $e_6^* = 2e_7 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_6$ и $a' \in \Gamma'$. Здесь мы также, подставляя координаты в форму (4), убеждаемся, что вектор e_6^* кратчайший из слоя и его длина равна 1.

Точно так же убеждаемся, что из векторов, идущих в третий слой, кратчайшим является вектор

$$e_7^* = -\frac{1}{4}a_5 + \frac{1}{2}a_6 + \frac{3}{12}\sqrt{11}a_7 = 3e_7 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6$$

и что длина его также равна 1.

Заметим теперь, что репер E_0 приведен по Минковскому, но в то же время в решетке Γ есть основной репер $E_0^*(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6^*, e_7^*)$ с меньшей суммой квадратов длин векторов и с меньшим седьмым вектором, т. е. репер E_0 и тем самым форма (1), для $n = 7$, приведены по Минковскому, но не приведены ни по Венкову, ни по Эрмиту. Отметим, что репер E_0^* приведен всеми тремя способами.

Формы (2) и (3) из второй леммы при $n = 7$ — это формы реперов E_7 и E_7^* , где $\alpha = \frac{7}{8}$, $\beta = 1,00144$ и $\gamma = 10^{-10}$. Такой выбор параметров α , β и γ позволяет нужным образом «огрубить» нашу конструкцию и в силу огрубления добавить произвольную форму φ . Разумеется, огрубленная конструкция, различая приведения по Венкову и по Минковскому, перестает различать приведения по Эрмиту и по Минковскому.

3°. Здесь мы обозначим через $\mathcal{V}_\varphi^*$ область Венкова $\mathcal{V}_\varphi$ при $\varphi = a_1a_2 \dots a_{n-1}x_1^2 + a_2 \dots a_{n-1}x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}^2 + x_n^2$, где $0 < a_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Теорема 3. Область приведения $\mathcal{H}^*$ есть предел областей $\mathcal{V}_\varphi^*$ при одновременном стремлении к нулю всех чисел a_i .

В некотором смысле это заметил еще Минковский, «перефразируя» (4) определение Эрмита из (1).

Теорема 4. При каждом $n \leq 6$ все области $\mathcal{V}_\varphi^*$ совпадают между собой и с областью $\mathcal{M}^* = \mathcal{H}^*$.

Этот факт следует из того, что 2^n -кратная область приведения $\mathcal{V}_\varphi^*$ при любом n есть часть множества $\mathcal{L}^*$, см. (3), а в силу результатов (3, 7), при $n \leq 6$ и множество $\mathcal{L}^*$ есть 2^n -кратная область приведения.

Теорема 5. При любом $n \geq 7$ области $\mathcal{V}_\varphi^*$ уже не обязательно совпадают между собой и каждая из них отличается от области $\mathcal{M}^*$.

Это можно доказать, подбирая должным образом в конструкциях п. 2° числа β и γ .

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ch. Hermite, J. reine. u. angew. Math., 40, 302 (1850). ² B. L. van der Waerden, Acta Math., 96, № 3—4 (1956). ³ С. С. Рышков, ДАН, 193, № 5, 1028 (1971). ⁴ H. Minkowski, Ges. Abh., 1, Leipzig — Berlin, 1911, S. 153. ⁵ H. Minkowski, Ges. Abh., 2, Leipzig — Berlin, 1911, S. 53. ⁶ Б. А. Венков, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 37 (1940). ⁷ П. П. Таммела, Записки научных семинаров ЛОМИ (в печати).