В. Г. БОНДАРЕНКО

**ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРЕХОДНЫХ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

(Представлено академиком Ю. В. Линником 24 IV 1972)

1°. В различных вопросах анализа и статистики важную роль играет эквивалентность счетно-аддитивных мер в бесконечномерных пространствах. Особенно хорошо проблема эквивалентности изучена для гауссовых мер в гильбертовом пространстве: имеется теорема Гаека — Фельдмана, дающая необходимые и достаточные условия эквивалентности двух гауссовых мер в терминах их корреляционных операторов. В настоящей заметке этот результат частично обобщается: дается достаточное условие эквивалентности переходных вероятностей диффузионных процессов в гильбертовом пространстве. В случае, когда коэффициенты диффузии постоянны, переходные вероятности являются гауссовыми и наше условие близко к условию Гаека — Фельдмана.

2°. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$. Рассмотрим оснащенное гильбертово пространство $H_+ \subset H \subset H_-$, построенное при помощи некоторого положительного оператора T такого, что T^{-1} является оператором Гильберта — Шмидта, $\|T^{-1}\| < 1$. Здесь H_- — пополнение пространства H по норме $|x|_- = |T^{-1}x|$, H_+ — сопряженное к нему пространство, получающееся из D_T после введения нормы $|x|_+ = |Tx|$ (1). Пусть $f(x)$ — функция на H_- со значениями в некотором банаховом пространстве. Тогда $D^n f(x)$ и $f^{(n)}(x)$ обозначают производные этой функции по норме $|x|_-$ и $|x|$ соответственно.

Мы будем рассматривать стохастические уравнения Ито вида

$$d\zeta_t = [I - G(\zeta_t)] dw_t, \quad (1)$$

где w_t — винеровский процесс в пространстве H_- (1).

Известно (1), что при некоторых требованиях на гладкость коэффициентов это уравнение имеет единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, решение, являющееся марковским процессом в пространстве H_- . Обозначим переходные вероятности процессов ζ_t и w_t через $P_t(x, \Gamma)$ и $W_t(x, \Gamma)$ соответственно.

Если G — постоянный оператор, то для эквивалентности мер $P_t(x, \Gamma)$ и $W_t(x, \Gamma)$ достаточно выполнения следующего условия (2).

Оператор $B = G + G^* - G^*G$ является оператором Гильберта — Шмидта, и для каждого $y \in H$ выполнено неравенство $(By, y) < (y, y)$.

Естественно предположить, что для случая, когда возмущение $G(x)$ — достаточно гладкий переменный оператор, условия эквивалентности мер $P_t(x, \Gamma)$ и $W_t(x, \Gamma)$ должны быть аналогичными. Однако нам не удалось получить столь тонкий результат, и в приведенных ниже достаточных условиях накладываются более сильные ограничения на оператор $G(x)$. Именно, всюду ниже предполагается, что выполнены следующие условия:

А) $G(x)$ является элементом пространства $L(H_-, H_+)$ при каждом $x \in H_-$ и его норма ограничена.

Б) Оператор $G(x)$ дважды дифференцируем, производные $D^k G(x)$, $k = 1, 2$, ограничены и $D^2 G(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим действующий в H оператор, определенный формулой

$$B(x) = G(x) + G^*(x) - G^*(x)G(x), \quad x \in H_-.$$

Теорема 1. Пусть выполняется условие

$$(B(x)y, y) < (T^{-2}y, y), \quad y \in H. \quad (2)$$

Тогда меры $P_t(x, \Gamma)$ и $W_t(x, \Gamma)$ эквивалентны для каждого $x \in H_-$, $t > 0$.

Доказательство проводится следующим образом. Запишем дифференциальное уравнение Колмогорова, соответствующее стохастическому уравнению (1):

$$\partial u / \partial t = 1/2 \text{Sp}[I - B(x)]u'', \quad (3)$$

Это уравнение решается при помощи метода параметрикса, обоснованного в (3) для случая бесконечномерного пространства. Именно, фундаментальное решение $P_t(x, \Gamma)$ ищется в виде

$$\int f(y) P_t(x, dy) = \int f(y) m_t(x, dy) + \int_0^t d\tau \iint f(y) r_\tau(z, dy) m_{t-\tau}(x, dz),$$

где $f(x)$ — липшицева функция на H_- , а мера $m_t(x, \Gamma)$, называемая параметриksom, определяется как

$$m_t(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \det[I - B(y)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{(C(x)(x-y), x-y)}{2t} \right\} W_t(x, dy),$$

$C(x) = I - [I - B(x)]^{-1}$, $r_t(x, \Gamma)$ — заряд, подлежащий определению.

Доказывается, что вариация этого заряда на любом измеримом множестве Γ удовлетворяет оценке

$$|r_t(x, \Gamma)| < \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{\Gamma} \exp \left\{ \frac{(Q(x-y), x-y)}{2t} \right\} W_t(x, dy), \quad x, y \in H_-,$$

где $Q \in L(H_-, H_+)$, $0 < (Qz, z) < (z, z)$, $z \in H$.

Из этой оценки следует представление

$$P_t(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} \rho(t, x, y) W_t(x, dy), \quad (4)$$

$x \in H_-$, $t > 0$, Γ — любое измеримое множество в H_- .

Доказывается, что плотность $\rho(t, x, y)$ положительна почти всюду по мере $W_t(x, dy)$. Отсюда уже следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Для выполнения условия (2) достаточно, чтобы оператор $G(x)$ удовлетворял неравенству

$$\text{Re}(G(x)y, y) < 1/2(T^{-2}y, y), \quad y \in H. \quad (2A)$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть α — действительное число. Обозначим через H_α пространство, полученное из области определения D_{T^α} оператора T^α после введения нормы $|x|_\alpha = |T^\alpha x|$.

Рассмотрим пару стохастических уравнений

$$d\zeta_t^k = [A - G_k(\zeta_t^k)] dw_t, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

где постоянный оператор $A \in L(H_-, H_\alpha)$. Обозначим через $P_t^k(x, \Gamma)$ переходную вероятность процесса ζ_t^k . Предположим, что существует оператор A^{-1} . Тогда, применяя формулу Ито к функции $f(x) = A^{-1}x$, уравнения (5) можно привести к виду (1).

С л е д с т в и е. Пусть операторы $D_k(x) = A^{-1}G_k(Ax)$ удовлетворяют условиям А), Б), и пусть выполнены неравенства

$$((D_k(x) + D_k^*(x) - D_k^*(x)D_k(x))y, y) < (T^{-2}y, y), \quad y \in H.$$

Тогда меры $P_t^1(x, \Gamma)$ и $P_t^2(x, \Gamma)$ эквивалентны для каждого $x \in H_+$, $t > 0$.

3°. Рассмотрим вопрос о дифференциальных свойствах плотности $\rho(t, x, y)$, определенной равенством (4). Оказывается, что здесь ситуация аналогична конечномерному случаю: гладкость решения дифференциального уравнения зависит от гладкости его коэффициентов.

Теорема 2. Пусть оператор $B(x)$ в уравнении (3) удовлетворяет неравенству (2), и пусть существуют ограниченные производные $D^k B(x)$, $k \leq n$.

Тогда существует производная $D_y^p D_x^m D_t^s \rho(t, x, y)$, $p + m + 2s \leq n - 2$, удовлетворяющая следующей оценке (в соответствующей норме $\|\cdot\|$):

$$D_y^p D_x^m D_t^s \rho(t, x, y) \|\|_{\rho+m} < ct^{-\frac{m+p}{2}-s} \exp\left\{\frac{Q(x-y), (x-y)}{2t}\right\}, t > 0, x, y \in H_-.$$

4°. Полученные выше результаты позволяют выделить некоторый класс нелинейных преобразований диффузионных процессов. Этот класс характеризуется тем свойством, что преобразованный процесс имеет переходную вероятность, эквивалентную переходной вероятности исходного процесса. В случае, когда коэффициенты диффузии постоянны, наш результат совпадает с выводами, полученными в работах о нелинейных преобразованиях гауссовых мер (⁴, ⁵).

В силу замечания 2 к теореме 1, достаточно рассмотреть преобразования процессов, определяемых стохастическими уравнениями вида (1). Мы будем рассматривать преобразование вида $f(x) = x + \varphi(x)$, где $x \in H_-$, $\varphi(x) \in H_+$. Через $\Lambda(x)$ обозначим оператор, определенный формулой $\Lambda(x) = G(x) + D\varphi(x) \cdot G(x) - D\varphi(x)$.

Теорема 3. Пусть $\varphi(x)$ трижды дифференцируема, $D^3\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица и выполняется следующее условие: оператор $F(x) = \Lambda(x) + \Lambda^*(x) - \Lambda^*(x)\Lambda(x)$ удовлетворяет неравенству (2).

Тогда переходная вероятность $Q_t(x, \Gamma)$ процесса $f(\zeta_t)$ эквивалентна переходной вероятности $P_t(x, \Gamma)$ процесса ζ_t , $x \in H_-$, $t > 0$.

Автор выражает глубокую признательность Ю. Л. Далецкому за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе.

Киевский политехнический институт
им. 50-летия Великой Октябрьской
социалистической революции

Поступило
17 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Л. Далецкий, УМН, 22, в. 4, 3 (1967). ² И. И. Гихман, А. В. Скороход, УМН, 21, в. 6, 83 (1966). ³ М. А. Piech, J. Funct. Anal., 3, 85 (1969). ⁴ L. Gross, Trans. Am. Math. Soc., 94, 404 (1960). ⁵ А. Д. Шаташвили, Тр. Вычислит. центра АН ГрузССР, в. 5, 1, 69 (1965).