

УДК 517.9 + 532

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ХУСНУТДИНОВА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 II 1972)

Рассматривается система уравнений температурного пограничного слоя для несжимаемой среды ($\rho = 1$) в случае стационарного обтекания некоторой криволинейной стенки ⁽¹⁾

$$L_1(u, T, v) \equiv \nu u_{yy} - \nu u_y - p_x + \gamma(x)T = uu_x, \quad u_x + v_y = 0; \quad (1)$$

$$L_2(u, T, v) \equiv \beta T_{yy} - \nu T_y + 4\mu u_y^2 - uT_x = 0,$$

где u, v — компоненты скорости; $T = t - t_\infty$ — разность температур между нагретой и не нагретой частицами жидкости; ν — вязкость, $p = p(x)$ — давление во внешнем потоке; $\gamma(x)$ — коэффициент, учитывающий подъемную силу.

На границе $\Gamma\{x = 0, y = 0\}$ области $D_A\{0 < x < A, 0 < y < \infty\}$ задано краевое условие

$$u = \varphi_1(x, y), \quad T = \varphi_2(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma, \quad v|_{y=0} = v_0(x). \quad (2)$$

Выполнены условия

I) $\varphi_1(0, y) = u_0(y) > 0$ при $y > 0$, $\varphi_1(x, 0) = u_0(0) = 0$, $u'_0(0) > 0$, $\lim_{y \rightarrow \infty} u_0(y) = u_+ > 0$;

II) $u_0^{(i)}(y), T_0^{(i)}(y), i = 0, 1, 2, 3, 4$, ограничены при $0 \leq y < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера;

III) $p_{xx}, \theta_1'(x) = [\varphi_2(x, 0)]_x, v_0'(x), \gamma'(x)$ непрерывны при $0 \leq x \leq A$;

IV) $T_0(y) > 0$ при $y > 0$, $T_0(0) = \theta_1(0)$, $\lim_{y \rightarrow \infty} T_0(y) = T_+ \geq 0$;

V) $\frac{d^k}{dy^k} L_1(u_0, T_0, v_0) = O(y^4)$, $\frac{d^k}{dy^k} \frac{1}{u_0} L_2(u_0, T_0, v_0) = O(y^{2-k}), k = 0, 1, 2$, при малых $y, x = 0$;

VI) $\frac{d^k}{dy^k} \frac{1}{u_0} L_2(u_0, T_0, v_0) = O(T_0^{2-k}), k = 0, 1, 2$, при $T_0 \rightarrow 0$.

Теорема. Пусть выполнены условия I) — VI) и $M_1 > \max_{\Gamma} T$; тогда в области D_A при $A \leq A_0(M_1)$ существует решение u, v, T системы (1) с условиями (2), обладающее следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) > 0$ при $y > 0$;
- 2) $0 \leq T(x, y) \leq M_1$;
- 3) $u_y \geq t > 0$ при $0 < y < y_1$, где t, y_1 — некоторые постоянные;
- 4) u, u_y, T_y непрерывны и ограничены в D_A ;
- 5) u_x, v_y непрерывны и ограничены в любой конечной части $\bar{D}_A$ ($\bar{D}_A$ — замыкание области D_A).

В случае, когда $p_x \leq 0, v_0(x) \leq 0, 0 \leq \gamma(x) \leq \gamma_0$ (γ_0 достаточно мало) такое решение задачи (1), (2) существует в области D_A при любом A . При $\gamma(x) \equiv 0$ решение задачи (1), (2) единственно.

Заменой переменных

$$x = x, \quad \psi = \psi(x, y), \quad u = \partial\psi/\partial y, \quad v - v_0(x) = -\partial\psi/\partial x, \\ \psi(x, 0) = 0,$$

и искомых функций.

$$\sqrt{\omega}(x, \psi) = u(x, y), \quad \theta(x, \psi) = T(x, y)$$

задача (1), (2) в области $R_A \{0 < x < A, 0 < \psi < \infty\}$ преобразуется к виду

$$L_3(\omega, \theta) \equiv \nu \sqrt{\omega} \omega_{\psi\psi} - \nu_0(x) \omega_{\psi} - 2p_x + 2\gamma(x) \theta = \omega_x, \quad (3)$$

$$L_4(\omega, \theta) \equiv \beta(\sqrt{\omega} \theta_{\psi})_{\psi} - \nu^0(x) \theta_{\psi} + \mu \omega_{\psi}^2 / \sqrt{\omega} - \theta_x = 0; \\ \omega = F_1(x, \psi), \quad \theta = F_2(x, \psi), \quad (x, \psi) \in \Gamma \{x = 0, \psi = 0\}. \quad (4)$$

Легко проверяется, что для доказательства существования решения задачи (1), (2), обладающего гладкостью, указанной в теореме, достаточно доказать существование решения ω, θ в области R_A при $A \leq A_0$ краевой задачи (3), (4) со следующими свойствами:

1) $\omega(x, \psi) > 0$ при $\psi > 0, 0 \leq \theta(x, \psi) \leq M_1$;

2) ω, θ непрерывны и ограничены в $\bar{R}_A$, имеют непрерывные в R_A производные, входящие в уравнение (3), и

$$|\omega_{\psi}| < M, \quad |\gamma \omega \omega_{\psi\psi}| < M, \quad |\gamma \omega \theta_{\psi}| < M, \quad (x, \psi) \in R_A, \quad (5)$$

$$|\omega_x| < M \psi^{1-\kappa}, \quad \omega_{\psi} \geq m > 0 \quad (6)$$

при $0 \leq \psi \leq \psi_1$ и $0 < \kappa < 1/2$; постоянные M, m, ψ_1 зависят от данных задачи.

Для доказательства существования решения задачи (3), (4) используется обычный в теории вырождающихся параболических уравнений подход ⁽²⁾ приближения к решению задачи (3), (4) по некоторой подпоследовательности вспомогательных решений системы (3). Вспомогательные решения строятся в расширяющейся (при $\varepsilon \rightarrow 0$) последовательности прямоугольников $R_A^{\varepsilon} \{0 < x < A, 0 < \psi < 1/\varepsilon\}$ с границей $\Gamma_A^{\varepsilon} \{x = 0, \psi = 0, \psi = 1/\varepsilon\}$ и удовлетворяют краевому условию

$$\omega_{\varepsilon} = F_{1\varepsilon}(x, \psi), \quad \theta_{\varepsilon} = F_{2\varepsilon}(x, \psi), \quad (x, \psi) \in \Gamma_A^{\varepsilon}, \quad (7)$$

где

$$F_{1\varepsilon}(x, \psi) = \omega_0(\varepsilon + \psi) \exp \{ \lambda_1(\varepsilon, \psi) x / \omega_0(\varepsilon + \psi) \},$$

$$F_{2\varepsilon}(x, \psi) = \theta_0(\psi) \exp \{ \lambda^2(\varepsilon, \psi) x / \theta_0(\psi) \} + \theta_1(x) - \theta_1(0),$$

$$\lambda_1(\varepsilon, \psi) = L_{\varepsilon}(\omega_0(\varepsilon + \psi), \theta_0(\psi)), \quad \lambda_2(\varepsilon, \psi) = L_4(\omega_0(\varepsilon + \psi), \theta_0(\psi)).$$

(Всюду в дальнейшем индекс ε у функций ω_{ε} и θ_{ε} будем опускать.)

Если решение ψ, θ задачи (3), (7) с условием

$$\theta(x, \psi) \leq M_1 \quad (1)$$

существует, то в области R_A^{ε} при $A \leq A_1$ выполняется оценка

$$\omega(x, \psi) \geq \omega_{\varepsilon}(x, 0) + f(\psi) (1 + l^{-\kappa x}), \quad (9)$$

где $f(\psi) = O(a_1 \psi^{1/3} + a_2 \psi)$ при $\psi \rightarrow 0, f(\psi) > 0$ при $\psi > 0$,

$$\lim_{\psi \rightarrow \infty} f(\psi) = a_3 > 0, \quad |f'(\psi)| < a_4, \quad |f''(\psi)| < a_5 \text{ при } \psi \geq 0.$$

Постоянные $a_1, a_2, a_3, A_1, 1/k$ достаточно малы и не зависят от ε . В случае $p_x \leq 0, \nu_0(x) \leq 0, \gamma(x) \leq 0$ оценка (9) выполняется в области R_A^{ε} при любом A ⁽²⁾.

Л е м м а. Пусть $u(x, y)$ непрерывна в $D_A^N \{0 < x < A, 0 < y < N\}$ вместе с производной u_y и удовлетворяет уравнению

$$a(x, y) u_x = u_{yy} + b(x, y) u_y + d(x, y) u_y^2 + H(x, y) \quad (10)$$

всюду в области D_A^N , за исключением, может быть, точек прямой $y = 0$, и пусть $\sup_{D_A^N} |u_{yy}| < \infty, |u| \leq K$, а непрерывные в D_A^N функции $a(x, y)$,

$b(x, y), d(x, y), H(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq a(x, y) \leq a_0, \quad |b(x, y)| \leq K_1, \quad |d(x, y)| \leq K_1, \\ |H(x, y)| \leq K_1, \\ u|_{\Gamma_A^N} = 0, \quad \Gamma_A^N \{x=0, y=0\} = N. \end{aligned}$$

Тогда в области D_A^N

$$|u_v(x, y)| \leq C(K, K_1, a_0). \quad (11)$$

З а м е ч а н и е. Если граничные значения $u|_{\Gamma_A^N} = \varphi(x, y)|_{\Gamma_A^N}$ ненулевые, но допускают такое продолжение $\varphi(x, y)$ внутрь области D_A^N , что $\sup_{D_A^N} (|\varphi_{yy}| + |\varphi_y| + |\varphi_x|) < \infty$, то для получения оценки (11) до-

статочно в уравнении (10) сделать замену $u = v + \varphi$.

Лемма применительно к линейному параболическому уравнению является обобщением теоремы 2 из (3).

В силу оценки (9) при $\psi \geq \psi_0$ $\omega(x, \psi) \geq a_\varepsilon(\psi_0) > 0$. Поэтому при $\psi \geq \psi_0$ систему (3) можно рассматривать как невырожденную параболическую систему. Последовательным применением к решениям ω и θ уравнений (3_I) и (3_{II}) системы (3) теорем 4, 5 из (3), пользуясь обозначениями этой работы, приходим к оценке

$$\|\omega\|_{2+\alpha}^{R_A^\varepsilon} + \|\theta\|_{2+\alpha}^{R_A^\varepsilon} \leq M_0(\psi_0), \quad \psi \geq \psi_0, \quad (12)$$

которая обеспечивает ((4), теоремы 11, 12) существование в R_A^ε производных $f_{\psi\psi}, f_x$ ($f = \omega_{\psi\psi}, \theta_{\psi\psi}, \omega_x, \theta_x$).

Переходя к переменным $x = x, y = \int_0^\psi \frac{dt}{\sqrt{\omega_\varepsilon(x, t)}}$, рассмотрим полосу $D_0 \{0 < x < A, 0 < y < y_0\}$, в которой

$$|u^{-3/4}u_x| < 1, \quad |(T - F_{2\varepsilon}(x, 0))_x| < 1. \quad (13)$$

Очевидно, при каждом $\varepsilon > 0$ такая полоса существует.

В области D_0 , в силу (8) и (13),

$$|u| < M_2, \quad |v| < |v_0| + \int_0^{y_0} |u_x| dt < M_3.$$

Выстраивая гладкое продолжение значений $u(x, y)$ с границы $\Gamma_0 \{x = 0, y = 0, y = y_0\}$ внутрь области D_0 , что возможно в силу условия V), получим согласно лемме, оценку на величину $|u_y| = 1/2 |\omega_\psi|$, а следовательно, и на

$$|u_{yy}| = \frac{1}{v} |uu_x + vu_y + p_x - \gamma T| = |\sqrt{v} \omega_{\psi\psi}|$$

постоянными, зависящими от M_1 и не зависящими от ε . Оценивая величины $|\omega_\psi|, |\sqrt{v} \omega_{\psi\psi}|, |\omega^{-7/8} \omega_x|$ по принципу максимума в области $R_1 \{0 < x < A, \psi_0(y_0) < \psi < 1/\varepsilon\}$ как решения соответствующих параболических уравнений при $A \leq A_0, A_0 = \min \{A_1, M_0^{-1}(\psi_0) \varphi_0^3\}$, имеем оценки

$$|\psi_\psi| < M, \quad |\sqrt{v} \omega_{\psi\psi}| < M, \quad |\omega^{7/8} \omega_x| < M. \quad (14)$$

Аналогично при $A \leq A_0$ получаются оценки

$$|\sqrt{v} \theta_\psi| < M, \quad |\sqrt{v} (\sqrt{v} \theta_\psi)_\psi| < M, \quad |\sqrt{v} \theta_x| < M, \quad (15)$$

где M — некоторая абсолютная не зависящая от ε постоянная.

Учитывая (14), (15) и вытекающее из оценок (9), (14) неравенство $\omega_\psi \geq m > 0$ при $0 \leq \psi \leq \psi_1$ (ψ_1 достаточно мало, но не зависит от ε), из параболических уравнений для функций $\sigma = \omega^{-1+\alpha}\omega_x$, $q = \omega^{-\delta}(\theta - F_{2\varepsilon}(x, 0))_x$ находим

$$|\omega^{-1+\alpha}\omega_x| < M_4, \quad |\omega^{-\delta}(\theta - F_{2\varepsilon}(x, 0))_x| < M_4, \quad (16)$$

где $0 < \alpha < 1/2$, $0 < \delta < 1/6$, M_4 не зависит от ε .

Из оценок (16) следует, что

$$|\omega^{-1/6}\omega_x| \rightarrow 0, \quad |(\theta - F_{2\varepsilon}(x, 0))_x| \rightarrow 0 \text{ при } (\psi, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

а с ними и

$$|u^{-3/4}u_x| \rightarrow 0, \quad |(T - F_{2\varepsilon}(x, 0))_x| \rightarrow 0 \text{ при } (y, \varepsilon) \rightarrow 0.$$

Таким образом, существует достаточно малое y_0 , не зависящее от ε , что при $0 \leq y \leq y_0$ выполняются неравенства (13). За счет выбора y_0 находится также и промежуток $0 \leq x \leq A_0(\psi_0(y_0))$, на котором выполняется неравенство (8).

В случае $p_x \leq 0$, $v_0(x) \leq 0$, $\gamma(x) \geq 0$ все оценки выполняются на произвольно заданном промежутке $0 \leq x \leq A$, если $\gamma(x) \leq \gamma_0$ и γ_0 достаточно мало. Схема доказательства этих оценок аналогична приведенной.

Существование решения задачи (3), (7) доказывается теперь стандартным путем с помощью принципа Лере — Шаудера.

Ввиду независимости оценок от ε существуют подпоследовательности ω_{ε_n} , θ_{ε_n} , равномерно сходящиеся вместе с производными, входящими в уравнения (3), на каждом конечном промежутке $1/n \leq \psi \leq n$ ($n > 1$), пределы которых удовлетворяют краевой задаче (3), (4).

При $\gamma \equiv 0$ в уравнение (3_I) не входит $\theta(x, \psi)$ и единственность его решения $\omega(x, \psi)$ известна (2). На этом решении уравнение (3_{II}) линейно и в силу принципа максимума его решение единственно.

Институт теоретической и прикладной механики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, «Наука», 1969. ² О. А. Олейник, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 3, 3 (1963). ³ С. Н. Кружков, Тр. Московск. матем. общ., 16 (1967). ⁴ А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1963.