

Э. А. ЯРВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ С ЧЕБЫШЕВСКИМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 II 1972)

1. Имеем «базисный» отрезок-функционал $F_{n-1} = (\mu_i)_0^{n-1}$. Будем его продолжать, выбирая каждый последующий параметр лежащим вне или на границе критического интервала. Получим $(\mu_i)_0^\infty$.

Теорема 1. Последовательность $(\mu_i)_0^\infty$, обладающая тем свойством, что каждый ее частичный отрезок-функционал $(\mu_i)_0^p$, $p \geq n$, где n фиксировано, имеет своим экстремальным $+T_p(x) = \cos p \arccos(2x-1)$ или $-T_p(x)$, не является моментной, за исключением разве лишь при следующих базисах: а) $\mu_0 = c$; $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, (n-1)$; б) $\mu_i = c$, $i = 0, \dots, (n-1)$.

Доказательство. Выделим из рассматриваемой $(\mu_i)_0^\infty$ три отрезка-функционала: $F_p = (\mu_i)_0^p$; $F_{p+1} = (\mu_i)_0^{p+1}$; $F_{p+2} = (\mu_i)_0^{p+2}$.

1) Рассмотрим случай, когда их экстремальные полиномы имеют одинаковые знаки, т. е. ими являются либо а) $+T_p(x)$, $+T_{p+1}(x)$, $+T_{p+2}(x)$, либо б) $-T_p(x)$, $-T_{p+1}(x)$, $-T_{p+2}(x)$.

Известно, что для полиномов Чебышева $T_p(x) = \cos p \arccos(2x-1)$ имеет место рекуррентная формула $T_{p+2}(x) = 4xT_{p+1}(x) - 2T_{p+1}(x) - T_p(x)$. Тогда $F_{p+2}(T_{p+2}) = 4F_{p+2}(xT_{p+1}) - 2F_{p+2}(T_{p+1}) - F_{p+2}(T_p)$.

В случае а) $F_{p+2}(T_{p+2}) = N_{p+2}$; $F_{p+2}(T_{p+1}) = N_{p+1}$; $F_{p+2}(T_p) = N_p$, откуда $4F_{p+2}(xT_{p+1}) = N_{p+2} + 2N_{p+1} + N_p$. Учитывая, что $N_p < N_{p+1} < N_{p+2}$, получим $N_{p+2} - N_p > N_{p+2} - F_{p+2}(xT_{p+1})$.

Но $F_{p+2}(xT_{p+1}) = \sum_{l=0}^{p+2} \Delta_{l, p+2} \tau_{l, p+2} T_{p+1}(\tau_{l, p+2})$, где $\{\tau_{l, p+2}\}_0^{p+2}$ — узлы полинома $T_{p+2}(x)$; $\{\Delta_{l, p+2}\}_0^{p+2}$ — нагрузки при разложении $(\mu_i)_0^{p+2}$ по узлам $\{\tau_{l, p+2}\}_0^{p+2}$. Нетрудно проверить, что $T_{p+1}(\tau_{l, p+2}) = (-1)^{p-l-1} (1 - 2\tau_{l, p+2})$. Используя это, имеем

$$F_{p+2}(xT_{p+1}) = - \sum_{l=0}^{p+2} |\Delta_{l, p+2}| \tau_{l, p+2} (1 - 2\tau_{l, p+2}),$$

$$N_{p+2} - N_p > \sum_{l=0}^{p+2} |\Delta_{l, p+2}| + \sum_{l=0}^{p+2} |\Delta_{l, p+2}| \tau_{l, p+2} (1 - 2\tau_{l, p+2}) >$$

$$> \sum_{l=0}^{p+2} |\Delta_{l, p+2}| (1 - \tau_{l, p+2}),$$

Заметим, что $\sum_{l=0}^{p+2} |\Delta_{l, p+2}| (1 - \tau_{l, p+2}) = N_{p+1, 1} -$ норма $(\mu_{i, 1})_0^{p+2}$, где

$\mu_{i, 1} = \mu_i - \mu_{i+1}$. Отсюда $N_{p+2} - N_p > N_{p+1, 1} \geq N_{n-2, 1}$, где $N_{n-2, 1}$ — норма $(\mu_{i, 1})_0^{n-1}$, причем $N_{n-2, 1} > 0$ при любом базисе $(\mu_i)_0^{n-1}$ кроме $\mu_i = c$, $i = 0, \dots, (n-1)$.

В случае б) получим ту же оценку для $N_{p-1} - N_p$ аналогичными рассуждениями.

2) Рассмотрим случай, когда знаки экстремальных полиномов отрезков $(\mu_i)_0^{p+1}, (\mu_i)_0^{p+2}$ чередуются, т. е. являются либо а) $-T_p(x), -T_{p+1}(x), +T_{p+2}(x)$, либо б) $-T_p(x), +T_{p+1}(x), -T_{p+2}(x)$.

Из (1) известно, что если $(\mu_i)_0^p$ имеет экстремальным $\pm T_p(x)$, то $(\mu_0, i)_0^p$, где $\mu_0, i = \mu_0, i-1 - \mu_1, i-1$, имеет экстремальным $\pm T_p(1-x) = \pm (-1)^p T_p(x)$, причем их нормы равны: $N_p = N_0, p$. Отсюда отрезкам $(\mu_i)_0^p, (\mu_i)_0^{p+1}, (\mu_i)_0^{p+2}$ с чередующимися знаками соответствуют $(\mu_i, i)_0^p, (\mu_0, i)_0^{p+1}, (\mu_0, i)_0^{p+2}$ с одинаковыми знаками экстремальных полиномов и тогда $N_{p+2} - N_p = N_0, p+2 - N_0, p > N_1, n-2$, где $N_1, n-2$ — норма $(\mu_1, i)_0^{n-2}$, причем $N_1, n-2 > 0$ при любом базисе $(\mu_i)_0^{n-1}$, кроме $\mu_0 = c; \mu_i = 0, i = 1, \dots, (n-1)$.

3) В случае, если экстремальными полиномами являются либо а) $+T_p(x), +T_{p+1}(x), -T_{p+2}(x)$, либо б) $-T_p(x), -T_{p+1}(x), +T_{p+2}(x)$, проделав выкладки, аналогичные случаю 1), получим $N_{p+2} - N_p > N_{n-1}/2 > 0$.

4) В случае, если экстремальными полиномами являются либо а) $-T_p(x), +T_{p+1}(x), +T_{p+2}(x)$, либо б) $+T_p(x), -T_{p+1}(x), -T_{p+2}(x)$, проведя рассуждения, аналогичные случаю 2) и используя результат случая 3), получим $N_{p+2} - N_p > N_{n-1}/2 > 0$.

Итак, рассмотрев все возможные случаи распределения знаков экстремальных полиномов имеем $N_{p+2} - N_p > k$, где k — минимальное из чисел $N_{n-2, 1}, N_1, n-1, N_{n-1}/2$. Отсюда $N_p > 1/2(p - (n-1))k + N_{n-1} = \alpha p + \beta$, где $\alpha = \text{const} > 0, \beta = \text{const}$, за исключением разве лишь упомянутых в теореме базисных, и $(\mu_i)_0^\infty$ не является моментной.

2. Рассмотрим случай аморфной последовательности $(\alpha_k)_0^\infty$. Из (1) известно, что каждый частичный отрезок $(\alpha_k)_0^{p-1}$, помимо критического интервала (μ_p', μ_p'') , имеет еще и интервал наилучшего продолжения $[\alpha_p, \alpha_p'']$, причем $\mu_p \leq \alpha_p' < \alpha_p'' \leq \mu_p''$.

Теорема 2. Существует единственная (с точностью до множителя) моментная последовательность $(\alpha_k)_0^\infty$, обладающая тем свойством, что каждый ее частичный отрезок-функционал $(\alpha_k)_0^{p-1}, p > 1$, аморфный и его интервал наилучшего продолжения совпадает с критическим интервалом: $\alpha_p' = \mu_p'; \alpha_p'' = \mu_p''$.

Доказательство этой теоремы требует установления некоторых свойств узлов полиномов Чебышева $\{T_p(x)\}$.

Лемма 1. Имеют место следующие соотношения

$$\sum_{l=0}^{p-1} (-1)^{p-l} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, (p-1), \\ p/2^{2p-1}, & k = p, \end{cases}$$

где $\{\tau_{l,p}\}_0^p$ — узлы полинома Чебышева $T_p(x) = \cos p \arccos(2x-1)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение отрезок-функционал $(v_i)_0^p = \frac{1}{2^0}, 0_1, \dots, 0_{p-1}, 0_p$ и будем искать его критический интервал для p -го параметра. Ввиду специальной структуры $(v_i)_0^p$, его критический интервал можно найти, не пользуясь общей теорией, а именно:

а) если p четное, то $v_p'' = 0$, так как $T_p(\bar{v}) = 1/2 = N_p$ и $\Delta_0'' = 1/2; \Delta_i'' = 0, i = 1, \dots, p$. Отсюда и, используя соотношения, полученные в (2), имеем: $\bar{\Delta}^{(p)} = 1, L_p = p/2^{2p-1}, v_p' = -p/2^{2p-1}; \Delta_0' = 0; \Delta_i' = (-1)^{p-i-1}, i = 1, \dots, (p-1); \Delta_p' = -1/2$.

б) если p нечетное, то $v_p' \leq 0; \Delta_0' = 1/2; \Delta_i' = 0, i = 1, \dots, p$ и из (2) получим $\bar{\Delta}^{(p)} = 1; L_p = p/2^{2p-1}; v_p'' = p/2^{2p-1}; \Delta_0'' = 0, \Delta_i'' = (-1)^{p-i}$.

$$i = 1, \dots, (p-1); \Delta_p'' = 1/2. \text{ Отсюда в обоих случаях имеем}$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} (-1)^{p-l} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, (p-1), \\ p/2^{2p-1}, & k = p. \end{cases}$$

Следствие. Имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{l=0}^{p-1} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{p-1} \tilde{\tau}_{l,p}^k, & k = 1, \dots, (p-1), \\ \sum_{l=0}^{p-1} \tilde{\tau}_{l,p}^k + \frac{p}{2^{2p-1}}, & k = p. \end{cases}$$

Лемма 2. Имеют место соотношения: $\sum_{l=0}^{p-1} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} = u_k p, k = 1, 2, \dots$, где u_k не зависит от p .

Лемма 2 доказывается по индукции.

Следствие. Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{2}{p} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \tilde{\tau}_{l,p}^k = u_k, \quad k = 0, \dots, (p-1).$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $(\alpha_k)_0^{p-1}$ — аморфный и $\alpha_p' = \mu_p', \alpha_p'' = \mu_p''$. Тогда

$$\alpha_k = \sum_{l=0}^p \Delta_l'' \tau_{l,p}^k = \sum_{l=0}^p \Delta_l' \tilde{\tau}_{l,p}^k, \quad k = 0, \dots, (p-1),$$

где $\Delta_l'' > 0, \Delta_l' > 0$. Найдем (Δ_l'') и (Δ_l') . Из (2) известно: $N_p' + N_p'' = \tilde{\Delta}^{(p)} p = 2\alpha_0$, откуда $\tilde{\Delta}^{(p)} = 2\alpha_0 / p$. Используя формулу $\Delta_l'' = \Delta_l' + + (-1)^{p-l} \frac{\tilde{\Delta}^{(p)}}{1/2}$, получим все $\Delta_l'' = \frac{2/1}{p} \alpha_0$ и все $\Delta_l' = \frac{2/1}{p} \alpha_0$.

Подставив (Δ_l'') и (Δ_l') в выражения для α_k имеем

$$\alpha_k = \frac{2\alpha_0}{p} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} \right) = \frac{2\alpha_0}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \tilde{\tau}_{l,p}^k = \alpha_0 u_k, \quad k = 0, \dots, (p-1),$$

т. е. все числа $(\alpha_k)_0^{p-1}$ определяются единственным образом (с точностью до множителя).

Построим $(\alpha_k)_0^\infty = (u_k)_0^\infty$ и рассмотрим частичный отрезок $(\alpha_k)_{p_0}^\infty = (u_k)_{p_0}^\infty$. Из представления $u_k = \frac{2}{p} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \tilde{\tau}_{l,p}^k, k=0, \dots, (p-1)$, и независимости u_k от p следует, что $(\alpha_k)_{p_0}^{p-1}$ аморфный, причем

$$\alpha_p'' = \mu_p'' = \frac{2}{p} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \tau_{l,p}^k + \frac{1}{2} \right); \quad \alpha_p' = \mu_p' = \frac{2}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \tilde{\tau}_{l,p}^k;$$

$$L_p = \mu_p'' - \mu_p' = \frac{1}{2^{2p-2}}.$$

Единственность при $\alpha_0 = 1$ очевидна.

Следствие. Если $(\alpha_i)_0^\infty$ обладает указанным в теореме свойством, то $L_p = \alpha_0 / 2^{2p-2}$.

3. Рассмотрим простейшую узловую абсолютно монотонную последовательность $(\mu_i)_0^\infty = (\sigma^i)_0^\infty, 0 < \sigma < 1$. Составим последовательность ее частичных отрезков $(\mu_i)_{p_0}^\infty, (\mu_i)_{p_0}^{n+1}, \dots, (\mu_i)_{p_0}^p, \dots$. Обозначим критический интервал $(\mu_i)_{p_0}^{p-1}$ для p -го параметра через (μ_p', μ_p'') , а нормы отрезков $\mu_0, \dots, \mu_{p-1}, \mu_p''$ и $\mu_0, \dots, \mu_{p-1}, \mu_p'$ — через N_p'' и N_p' . Из (2) известно, что для любой моментной последовательности $(\mu_i)_0^\infty$ с нормой N имеет место $N_p'' + N_p' \leq 4Np$. В случае же, если $(\mu_i)_0^\infty = (\sigma^i)_0^\infty$, то

$N_p'' + N_p' \geq p$ и, следовательно, хоть одна из последовательностей норм $\{N_p''\}$ или $\{N_p'\}$ расходится.

Теорема 3. Если $(\mu_i)_0^\infty = (\sigma^i)_0^\infty$, где $0 < \sigma < 1$, то существует такая выборка $p = p_k$, при которой $\lim N_{p_k}' = \lim N_{p_k}'' = \infty$.

Доказательство. При любом p для N_p' и N_p'' справедливы оценки

$$N_p' = -T_p(\sigma) + 2^{2p-1}(\sigma^p - \mu_p) = -T_p(\sigma) + 2^{2p-1}h_p' \geq 2^{2p-1}h_p' - 1,$$

$$N_p'' = T_p(\sigma) + 2^{2p-1}(\mu_p'' - \sigma^p) = T_p(\sigma) + 2^{2p-1}h_p'' \geq 2^{2p-1}h_p'' - 1.$$

Из (2) следует, что $p/2^{2p-1} \leq h_p' + h_p'' \leq 4p/2^{2p-1}$. А тогда для доказательства теоремы достаточно найти такую выборку $p = p_k$, при которой h_{p_k}' и h_{p_k}'' имеют одинаковый порядок малости.

Пусть $\tau_{s,p} < \sigma < \tau_{s+1,p}$, где $\tau_{s,p}$ — ближайший слева к точке σ узел полинома $T_p(x)$; p фиксировано и достаточно велико, чтобы оказалось $s \geq 1$; $s+1 \leq p-1$. Из (2) имеем:

$$\begin{aligned} \text{а) если } T_p(\tau_{s,p}) = +1, \quad \text{то } h_p' = \max_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) = R_p^{(s)}(\sigma), \quad h_p'' = \\ = -\min_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) = R_p^{(s+1)}(\sigma), \quad h_p'/h_p'' = (\tau_{s+1,p} - \sigma)/(\sigma - \tau_{s,p}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) если } T_p(\tau_{s,p}) = -1, \quad \text{то } h_p' = R_p^{(s+1)}(\sigma); \quad h_p'' = -R_p^{(s)}(\sigma); \quad h_p'/h_p'' = \\ = (\sigma - \tau_{s,p}) / (\tau_{s+1,p} - \sigma). \end{aligned}$$

Используя, что, по определению, $s = E\left(\frac{2p}{\pi} \arcsin \sqrt{\sigma}\right) = E(ap)$, где $E(ap)$ — целая часть ap , получим

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sigma - \tau_{s,p}}{\tau_{s+1,p} - \sigma} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{ap - E(ap)}{1 - [ap - E(ap)]}.$$

Отсюда видно, что для доказательства теоремы достаточно найти такую выборку $p = p_k$, при которой

$$0 < a \leq ap_k - E(ap_k) \leq A < 1.$$

Будем ее искать. Функция $E(ax)$ имеет разрывы в точках $\{m/\alpha\}^\infty$, причем, поскольку $\alpha < 1$, то между двумя соседними точками разрыва имеется по крайней мере одно целое число. Обозначим через p_m ближайшее слева к точке m/α (или совпадающее с ней) целое число. Искомую выборку $p = p_k$ определим так:

$$p_k = \begin{cases} p_m + 1, & \text{если } m/\alpha \leq p_m + 1/2, \\ p_m, & \text{если } m/\alpha > p_m + 1/2. \end{cases}$$

Действительно, при $m/\alpha \leq p_m + 1/2$ $1/2\alpha \leq ap_k - E(ap_k) \leq \alpha$ и при $m/\alpha > p_m + 1/2$ $1 - \alpha \leq ap_k - E(ap_k) \leq 1 - 1/2\alpha$. Взяв за a минимальное из чисел $1/2\alpha$ и $1 - \alpha$, а за A — максимальное из чисел α и $1 - 1/2\alpha$ получим, что $p = p_k$ искомая.

Следствие. При $p = p_k$ N_p' и N_p'' имеют порядок роста p .

Ленинградский электротехнический институт связи
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
23 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. В. Вороновская, Метод функционалов и его приложения, 1963. ² Е. В. Вороновская, Э. А. Ярв, ДАН, 197, № 1 (1971).