

УДК 517.9+530.145.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. Р. ЯФАЕВ

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 22 XII 1971)

1. Задачу рассеяния для оператора Шредингера H системы трех попарно взаимодействующих частиц подробно исследовал Л. Д. Фаддеев (см. ⁽¹⁾). Для изучения резольвенты оператора H он предложил систему интегральных уравнений, которая рассматривается в некотором вспомогательном банаховом пространстве. При этом важную роль играет исследование соответствующего однородного уравнения. В ⁽¹⁾ было показано, что множество значений параметра, для которых это уравнение имеет нетривиальные решения, может иметь в качестве предельных точек разве лишь собственные числа соответствующих парных задач. Отсюда легко следует, что отрицательные собственные значения оператора H также могут накапливаться только к этим числам. В настоящей работе мы, опираясь на технику Л. Д. Фаддеева, показываем, что при естественных предположениях относительно парных взаимодействий оператор H может иметь разве лишь конечное число отрицательных собственных значений.

Наша методика применима и к некоторым трехчастичным операторам, парные взаимодействия которых имеют кулоновские особенности. В частности, мы показываем, что спектр отрицательного иона водорода не имеет лежащих левее нуля точек накопления (и следовательно, имеет лишь конечное число собственных значений левее непрерывного спектра). Тем самым решена одна из задач, поставленных в известном обзоре А. Г. Сигалова ⁽²⁾. Отметим, что наш результат является подтверждением гипотезы, высказанной физиками (см., например, ⁽³⁾), относительно дискретного спектра отрицательного иона водорода.

2. В настоящей заметке мы будем в основном придерживаться обозначений, принятых в работе ⁽¹⁾. Всюду подразумевается, что оператор H рассматривается в системе координат, связанной с центром инерции трех частиц; тогда

$$H = H_0 + \sum_{\alpha} V_{\alpha}, \quad \alpha = 12, 13, 23,$$

причем операторы H_0 и V_{α} определяются в импульсном представлении формулами

$$(H_0 f)(k_{\alpha}, p_{\alpha}) = (k_{\alpha}^2/(2m_{\alpha}) + p_{\alpha}^2/(2n_{\alpha})) f(k_{\alpha}, p_{\alpha}),$$

$$(V_{\alpha} f)(k_{\alpha}, p_{\alpha}) = \int v_{\alpha}(k_{\alpha} - k'_{\alpha}) f(k'_{\alpha}, p_{\alpha}) dk'_{\alpha}.$$

Здесь и в дальнейшем k_{α}, p_{α} — координаты, сопряженные к координатам Якоби, а m_{α}, n_{α} — различные приведенные массы. Интеграл без указания пределов означает интегрирование по всему пространству R^3 .

Пусть оператор h_{α} действует на функции переменной $k \in R^3$ по формуле

$$(h_{\alpha} f)(k) = \frac{k^2}{2m_{\alpha}} f(k) + \int v_{\alpha}(k - k') f(k') dk'.$$

Обозначим через $-\kappa_{s,\alpha}^2$ собственные числа оператора h_α . Различными методами было доказано ^(1, 4, 5), что непрерывный спектр H заполняет полуюсь $[-\kappa^2, \infty)$, где $-\kappa^2 = \min_{s, \alpha} (-\kappa_{s,\alpha}^2)$, а вне интервала $[-\kappa^2, \infty)$ может находиться лишь счетное множество конечнократных собственных значений.

Предположим, что парные взаимодействия $v_\alpha(k)$, $v_\alpha(-k) = \overline{v_\alpha(k)}$, являются дифференцируемыми функциями k при $k \neq 0$, причем

$$|v_\alpha(k)|, |\nabla v_\alpha(k)| \leq C(1 + |k|)^{-1-\theta}, \quad \theta > 1/2, \\ |\nabla v_\alpha(k+l) - \nabla v_\alpha(k)| \leq C|l|^\nu(1 + |k|)^{-1-\theta}, \quad \nu > 0 \quad (1)$$

при $|k| \geq 1$ и $|l| \leq 1$. Через C мы обозначаем различные постоянные, точное значение которых нам безразлично. При $k = 0$ функции $v_\alpha(k)$ могут, например, иметь степенные особенности с показателем, меньшим единицы. Пусть при $|k| \leq 1$ справедливо представление

$$v_\alpha(k) = \int_{-\beta_0}^1 |k|^\beta dS_\alpha(\beta) + \hat{v}_\alpha(k), \quad \beta_0 < 1, \quad (2)$$

где S_α — конечная мера, а функция $\hat{v}_\alpha(k)$ дифференцируема и при $|k| \leq 1$ удовлетворяет оценке

$$|\nabla \hat{v}_\alpha(k+l) - \nabla \hat{v}_\alpha(k)| \leq C|l|^\nu. \quad (3)$$

Наши предположения относительно $v_\alpha(k)$ несколько отличаются от условий работы ⁽¹⁾. Мы требуем дифференцируемости потенциалов при $k \neq 0$; в то же время наличие у $v_\alpha(k)$ степенных особенностей вида $|k|^\beta$, $\beta > -1$, соответствует потенциалам, убывающим в x -представлении как $r^{-2-\epsilon}$, $\epsilon > 0$. Как и в ⁽¹⁾, нетрудно доказать, что при условиях (1) — (3) оператор H является самосопряженным на плотной в $L_2(R^6)$ области определения, состоящей из всех функций $f(k, p)$ с конечным интегралом

$$\iint f^2(k, p)(1 + k^2 + p^2)^2 dk dp < \infty.$$

Теорема 1. При сделанных предположениях относительно $v_\alpha(k)$ отрицательные собственные значения оператора H (в том числе лежащие на непрерывном спектре) могут иметь лишь конечную кратность и не имеют отрицательных точек накопления.

Приведем здесь набросок доказательства теоремы 1. Ради простоты будем считать, что каждый из операторов h_α имеет ровно одно отрицательное собственное число $-\kappa_\alpha^2$. Предположим, что собственные значения z_s оператора H имеют отрицательную точку накопления z_0 . Обозначим через ω_s решения однородного интегрального уравнения Л. Д. Фаддеева при значениях параметра, равных z_s , нормированные на единицу во вспомогательном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ (см. ⁽¹⁾) шести компонентных вектор-функций $\{\omega = \rho_\alpha(k, p), \sigma_\alpha(p)\}$, удовлетворяющих некоторому условию Гёльдера. В работе ⁽¹⁾ доказана компактность κ_s в $\mathfrak{B}$, что, как будет видно ниже, противоречит ортогональности собственных функций ψ_s оператора H . Отметим, что ψ_s просто выражаются через $\rho_\alpha^{(s)}$ и $\sigma_\alpha^{(s)}$ и обозначим через ψ_0 функцию, отвечающую ω_0 , предельному элементу сходящейся подпоследовательности ω_s .

В работе ⁽¹⁾ показано, что, если $z_0 \neq -\kappa_\alpha^2$, то в интеграле

$$\iint \psi_s(k, p) \overline{\psi_0(k, p)} dk dp = 0 \quad (4)$$

можно перейти к пределу при $s \rightarrow \infty$. Отсюда легко вытекает равенство ω_0 нулю, что противоречит условию нормировки ω_0 . Так как выражения ψ_s через $\rho_\alpha^{(s)}$ и $\sigma_\alpha^{(s)}$ становятся сингулярными при $p_\alpha = 0$ для значений z_s , неограниченно приближающихся к какому-либо парному собственному числу $-\kappa_\alpha^2$, то в случае $z_0 = -\kappa_\alpha^2$ предельный переход в (4) не-

посредственно оправдать нельзя. Однако из равенства (4) и компактности ω_s удается извлечь, что $\sigma_x^{(0)}(0) = 0$, если $z_0 = -\kappa_a^2$. Условие $\alpha_x^{(0)}(0) = 0$ позволяет после соответствующих преобразований оценить интеграл от функции $\psi_s \bar{\psi}_0$ по области $|p_\alpha| \leq \delta$ равномерно по s и тем самым оправдать предельный переход при $s \rightarrow \infty$ в равенстве (4). Как и в (1), отсюда вытекает, что $\omega_0 \equiv 0$, а потому собственные значения z_s отрицательных точек накопления иметь не могут.

3. В работе (6) было показано, что оператор

$$H_\eta^{(c)} = -(2m_\alpha)^{-1} \Delta_{r_\alpha} - (2n_\alpha)^{-1} \Delta_{r_\alpha} - r_{12}^{-1} - r_{13}^{-1} + \eta r_{23}^{-1},$$

где r_α , $\alpha = ij$, — расстояние между i -й и j -й частицами, а r_α — расстояние от k -й частицы до центра инерции частиц i и j (мы пользуемся здесь записью $H_\eta^{(c)}$ в x -представлении; r_α , ρ_α — координаты Якоби), имеет при $\eta < 1$ бесконечное число изолированных собственных значений, накапливающихся к левому концу непрерывного спектра. В случае $\eta > 1$ Дж. Уильямс доказал (7), что левее точки $-(\kappa^{(0)})^2$ может находиться лишь конечное множество собственных значений оператора $H_\eta^{(c)}$. Важным примером оператора вида $H_\eta^{(c)}$ является оператор Шредингера для отрицательного иона водорода. Он соответствует не исследованному ранее случаю $\eta = 1$, который не поддается вариационной технике работ (6, 7).

Перейдем к импульсному представлению и рассмотрим несколько более общий по сравнению с $H_1^{(c)}$ оператор $\tilde{H}^{(c)}$. Предположим, что парные взаимодействия $v_\alpha^{(c)}(k)$ оператора $\tilde{H}^{(c)}$ представимы в виде

$$v_\gamma^{(c)}(k) = -|k|^{-2} + \tilde{v}_\gamma(k), \quad \gamma = 12, 13; \quad v_{23}^{(c)}(k) = |k|^{-2} + \tilde{v}_{23}(k),$$

где $\tilde{v}_\gamma$ и $\tilde{v}_{23}$ удовлетворяют условиям (1) — (3) и $\tilde{v}_\gamma(k) = \tilde{v}_\gamma(-k)$, а соответствующий оператор $\tilde{h}_{23}^{(c)}$ не имеет собственных значений.

Наш подход к исследованию дискретного спектра оператора основан на рассмотрении интегральных уравнений Л. Д. Фаддеева. При итерациях и других преобразованиях этих уравнений удается проследить (происходящее за счет компенсации особенностей $v_\gamma^{(c)}(k)$ и $v_{23}^{(c)}(k)$) сокращение сингулярностей вида $|k|^{-2}$ и $|k|^{-1}$ в соответствующих ядрах интегральных уравнений. (Отметим, что сокращение сингулярностей порядка $|k|^{-2}$ прослежено в (8).) Для сокращения сингулярностей вида $|k|^{-1}$ существенна центральная симметрия функций $\tilde{v}_\gamma(k)$. Исследование получившейся системы уравнений с гладкими ядрами приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Отрицательные собственные значения оператора $\tilde{H}^{(c)}$ конечнократно и не имеют лежащих строго левее нуля точек накопления.*

Следствие. *Оператор $\tilde{H}^{(c)}$ имеет разве лишь конечное число собственных значений, лежащих ниже непрерывного спектра.*

Автор выражает искреннюю благодарность М. Ш. Бирману и Л. Д. Фаддееву за интерес к работе.

Примечание при корректуре. Когда статья была уже сдана в печать, автору удалось получить обобщения теорем 1 и 2 на случай систем из произвольного числа частиц. Отсюда, в частности, вытекает утверждение о конечности дискретного спектра у атомарных ионов с зарядом ядра на единицу меньшим заряда электронной оболочки, а также у систем типа двухатомных молекул.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Д. Фаддеев, Тр. Матем. инст. АН СССР, 69 (1963). ² А. Г. Сигалов, УМН, 22, 3 (1967). ³ Г. Бете, Э. Солпитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., 1960. ⁴ W. Hunziker, Helv. phys. acta, 39, 451 (1966). ⁵ Г. М. Жислин, Тр. Московск. матем. общ., 9, 81 (1960). ⁶ T. Kato, Trans. Am. Math. Soc., 70, 212 (1951). ⁷ J. Uchiyama, Publ. Res. Ins. Math. Sci., Kyoto Univ., Ser. A, 5, 51 (1969). ⁸ А. М. Веселова, Теоретич. и матем. физ., 3, 326 (1970).