

А. Б. ЗАЛЕСКИЙ

УСЛОВИЕ ПОЛУПРОСТОТЫ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППОВОЙ
АЛГЕБРЫ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 21 IV 1972)

Пусть P — некоторое поле, p — его характеристика. Групповая алгебра PG называется модулярной, если группа G содержит элементы порядка p , и немодулярной — в противном случае. Хорошо известно, что немодулярная групповая алгебра разрешимой группы всегда полупроста (в смысле Джекобсона). Предполагают, что это справедливо для произвольной группы ⁽¹⁾. Вопрос о полупростоте модулярных групповых алгебр гораздо сложнее: до сих пор не существует сколько-нибудь правдоподобного предположения, которое предсказывало бы (в групповых терминах) необходимые и достаточные условия полупростоты модулярной групповой алгебры.

В этих условиях естественно было обратиться к классу разрешимых групп. Критерий полупростоты модулярной групповой алгебры метабелевой группы найден Пассманом ⁽²⁾; для некоторых других классов разрешимых групп, в частности, для периодических, критерий полупростоты получен автором ⁽³⁾. Важный шаг на пути к решению проблемы полупростоты групповой алгебры разрешимой группы сделан Хамптоном и Пассманом ⁽⁴⁾ *. Используя их результат, мы получаем здесь полное решение этой проблемы.

Теорема. *Всякая разрешимая группа G содержит нормальную FC-подгруппу Σ со следующим свойством: если $I \neq 0$ — произвольный идеал групповой алгебры PG , то $I \cap P\Sigma \neq 0$. Кроме того, групповая алгебра PG полупроста тогда и только тогда, когда группа Σ не содержит элемента x порядка p такого, что $H: C_H(x) < \infty$ для каждой конечнопорожденной подгруппы H группы G . (Здесь $C_H(x)$ — централизатор элемента x в группе H .)*

Содержание статьи составляет доказательство первого утверждения теоремы; второе легко вытекает из первого и следующего результатов Хамптона и Пассмана ⁽⁴⁾: Пусть S — нормальная FC-подгруппа группы G , JPG — радикал Джекобсона групповой алгебры PG . Тогда соотношение $JPG \cap PS \neq 0$ имеет место тогда и только тогда, когда S содержит элемент x порядка $p = \text{char}(P)$, такой, что $H: C_H(x) < \infty$ для любой конечнопорожденной подгруппы H группы G .

Обозначения и определения. $\text{Aut}(H)$ — группа автоморфизмов группы H . При $g \in \text{Aut}(H)$ мы полагаем $H^g = \{h \in H \mid g(h) = h\}$. Ясно, что H^g — подгруппа группы H .

Автоморфизм $g \in \text{Aut}(H)$ называется ограниченным, если $H: H^g < \infty$. Множество ограниченных автоморфизмов группы G образует группу, которая обозначается через $\text{RAut}(H)$.

FC-группа — группа с конечными классами сопряженных элементов.

$H \triangleleft G$: группа H — нормальный делитель группы G .

$C_G(M)$ — централизатор множества M в группе G .

* Автор признателен проф. Д. С. Пассману за препринт работы ⁽⁴⁾.

$D_G(M) = \{g \in G \mid \{m g m^{-1}\}_{m \in M} \text{ — конечное множество}\}.$

Если $M = G$, то индекс обычно будет опускаться, т. е. $D(G) = D_G(G)$ и $C(G) = C_G(G)$ — центр группы G .

Положим $D^0(G) = D(G)$ и определим индуктивно группу $D^{\lambda+1}(G)$ как прообраз группы $D(G/D^\lambda(G))$ при отображении $G \rightarrow G/D^\lambda(G)$. Для предельного трансфинитного числа λ мы полагаем $D^\lambda(G) = \bigcup_{\mu < \lambda} D^\mu(G)$. Кроме того, положим $E(G) = \bigcup D^\lambda(G)$. Мы будем писать D^λ вместо $D^\lambda(G)$, если это не ведет к путанице.

Лемма 1. Пусть $F \triangleleft H$ и $R \operatorname{Aut}(H, F)$ — подгруппа группы $R \operatorname{Aut}(H)$, состоящая из всех автоморфизмов, оставляющих инвариантной группу F .

Тогда $R \operatorname{Aut}(F)$ индуцирует группу ограниченных автоморфизмов на группах F и H/F .

Доказательство вытекает непосредственно из определений.

Лемма 2. Пусть H — абелева группа и $g \in R \operatorname{Aut}(H)$.

Тогда элементы $\{g(h)h^{-1}\}_{h \in H}$ образуют конечную подгруппу, инвариантную относительно g .

Доказательство легко вытекает из того факта, что отображение $h \rightarrow g(h)h^{-1}$ является гомоморфизмом группы H в себя.

Лемма 3. Пусть H — абелева группа экспоненты p , $G \subset R \operatorname{Aut}(H)$ — разрешимая группа.

Тогда H обладает конечной G -инвариантной подгруппой $S \neq 1$.

Группу H можно трактовать как векторное пространство над полем F_p из p элементов. Тогда группа G оказывается группой ограниченных автоморфизмов в смысле статьи автора ⁽⁵⁾ и лемма 3 эквивалентна теореме 1 статьи ⁽⁵⁾.

Ради полноты мы дадим здесь эскиз доказательства этой теоремы для нашего случая. Воспользуемся индукцией по классу разрешимости группы G . Если подгруппа $H_{G'}$ точек группы H , неподвижных относительно элементов коммутанта G' группы G , отлична от единицы, то лемма 3 вытекает из леммы 2. В противном случае, по предположению индукции, имеется конечный неприводимый G' -модуль F , на котором группа G' действует эффективно. Пусть M_F — сумма всех G' -подмодулей модуля H , эквивалентных F . Если M_F — бесконечный модуль, то M_F содержит прямую сумму бесконечного числа G' -модулей, эквивалентных F , откуда следует, что для некоторого $g \in G'$ группа $\{g(h)h^{-1}\}_{h \in H}$ бесконечна, что противоречит лемме 2. Итак, модуль M_F конечен.

Из теории представлений известно, что все неприводимые подмодули модуля M_F попарно эквивалентны; следовательно, $gM_F = M_{gF}$, т. е. группа G действует на множестве $X = \{M_F\}$ как группа подстановок, причем $G'|X = 1$. Очевидно, что для любого $g \in G$ пространство $\sum g^i M_F \subset M_F + S$, где $S = \{g(h) - h\}_{h \in H}$, является конечным. Следовательно, каждый элемент группы G сдвигает конечное множество символов $x \in X$. Но тогда, если $g_1 x \neq x$, то $g_1(gx) \neq gx$ для всех $g \in G$ (ибо G действует на X как абелева группа), так что множество $\{gx\}_{g \in G}$ обязано быть конечным. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть H — абелева группа и $G \subset R \operatorname{Aut}(H)$ — разрешимая группа.

Тогда либо H обладает конечной G -инвариантной подгруппой $S \neq 1$, либо $G = 1$.

Доказательство получается в результате сопоставления лемм 2 и 3.

Лемма 5. Пусть G, H — разрешимые группы и $G \subset R \operatorname{Aut}(H)$.

Тогда H обладает возрастающим нормальным рядом G -инвариантных подгрупп H_i , факторы которого либо G -тривиальны, либо конечны.

Это утверждение — очевидное следствие леммы 4.

Лемма 6. Пусть L — разрешимая группа $H \triangleleft L$, $G = D_L(H)$ и $S = H \cdot G$. Предположим, что $E(H) = H$.

Тогда $E(S) \supset H$.

Доказательство. Пусть $\varphi: L \rightarrow \text{Aut}(H)$ — естественное отображение. Тогда, очевидно, $\varphi(G) \subset \text{R Aut}(H)$. Пусть $\{H_\gamma\}$ — ряд подгрупп группы H в соответствии с леммой 5. По условию, $H = \bigcup D^\lambda(H)$. Положим $D_{\gamma+1}^\lambda(H) = [D^\lambda(H) \cdot (H_\gamma \cap D^{\lambda+1}(H))]$, где $[M]_H$ — нормальный делитель группы H , порожденный множеством M . Нетрудно убедиться, что $D_{\gamma+1}^\lambda(H) \triangleleft S$ и $D_{\gamma+1}^\lambda(H) / D_\gamma^\lambda(H) \subset D(S / D_\gamma^\lambda(H))$. Отсюда следует лемма 6.

Предложение 1. *Всякая разрешимая группа G содержит такую нормальную подгруппу T , что $E(T) = T$ и $D_G(T) \subset T$.*

Доказательство. Положим $T_1 = k(G)$, где $k(G)$ — последний отличный от единицы член ряда коммутантов группы G , и затем индуктивно определим $T_{i+1} = T_i \cdot K_i$, где K_i — прообраз в $D_G(T_i)$ группы $k(D_G(T_i) / T_i \cap D_G(T_i))$. Легко видеть, что последовательность $\{T_i\}$ стабилизируется на некотором помере $m \leq n$, где n — длина ряда коммутантов группы G . Положим $T = T_m$; тогда $T \triangleleft G$ и $D_G(T) \subset T$. В силу леммы 6 $E(T_i) = T_i$, так что $E(T) = T$.

Лемма 7. *Пусть H — подгруппа группы G и H_0 — подгруппа конечного индекса группы H . Предположим, что для некоторого $\alpha \in PG$ и любого $x \in H_0$ мы имеем $\alpha x = x\alpha$.*

Тогда $\alpha \in PD_G(H)$.

Доказательство. Запишем $\alpha = \sum r_i g_i$ ($r_i \in P$, $g_i \in G$). Тогда $\sum r_i x g_i = \sum r_i g_i x$ и для каждого i найдется номер $j = j(i, x)$ такой, что $g_i x = x g_j$. Пусть s_{ij} — представитель класса $C_{H_0}(g_i) s_{ij}$ тех элементов $x \in H_0$, для которых $g_i x = x g_j$, если этот класс не пуст. Тогда $H_0 = \bigcup C_{H_0}(g_i) s_{ij}$, т. е. $C_{H_0}(g_i)$ — подгруппа конечного индекса группы H_0 . Поэтому $g_i \in D_G(H)$ для каждого i , так что $\alpha \in PD_G(H)$.

Лемма 8. *Пусть G — группа и P — поле. Предположим, что $I \neq 0$ — идеал алгебры $PE(G)$, инвариантный относительно G .*

Тогда $I \cap PD(G) \neq 0$.

Доказательство. Обозначим следующее утверждение через (H) : Пусть $H \triangleleft G$ и $I \neq 0$ — идеал алгебры PH такой, что $G: G(I) < \infty$, где $G(I) = \{g \in G \mid gIg^{-1} = I\}$. Тогда $I \cap PD(G) \neq 0$.

Пусть $E(G) = \bigcup D^\lambda$ (мы пишем D^λ вместо $D^\lambda(G)$). Докажем сначала, что (D^λ) влечет $(D^{\lambda+1})$.

Элементы алгебры $PD^{\lambda+1}$ будем записывать в виде $\sum \alpha_i \bar{g}_i$, где $\alpha_i \in PD^\lambda$, а $\bar{g}_i$ — представители различных смежных классов группы $D^{\lambda+1}$ по D^λ . Если $\alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n \in I$, то умножив на элемент $\bar{g}_1^{-1}$ справа, мы видим, что идеал I содержит элементы вида $\alpha_1 + \alpha_2 \bar{g}_2 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n$. Среди таких элементов идеала I выберем элемент τ с наименьшим числом n ненулевых слагаемых. Пусть $L = \{g \in G \mid g \bar{g}_i g^{-1} \bar{g}_i^{-1} \in D^\lambda, i = 2, \dots, n\}$. Обозначим через (τ) множество ненулевых элементов вида $\sum l(st\tau)l^{-1}$, где $s, t \in PD^\lambda$, $l \in L$. Все они, ввиду минимальности τ , имеют n слагаемых, так что элементы $\sum l(sa_i t)l^{-1}$, $l \in L$, $s, t \in PD^\lambda$, $\text{efyojuxs nqtog } I_1 \neq 0$ кольца PD^λ такой, что $U_l l^{-1} = I_1$, $l \in L$. Поэтому $G: G(I_1) < \infty$. Так как (D^λ) имеет место, то мы можем выбрать $\tau \in (\tau)$ так, что $\alpha_i \in PD(G)$. Запишем $\tau = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{g}_2 + \dots + \alpha_n \bar{g}_n$, $\alpha_i \in PD(G)$. Пусть $\alpha_1 = p_1 g_1 + \dots + p_m g_m$ — разложение элемента α_1 по групповому базису и $C = C_G(g_1, \dots, g_m)$. Тогда группа $M = C \cap L \cap G(I)$ имеет конечный индекс в G . При $x \in M$ запишем

$$x^{-1} \tau x - \tau = \sum_{i=2}^n [x^{-1} \alpha_i x (x^{-1} \bar{g}_i x \bar{g}_i^{-1}) - \alpha_i] \bar{g}_i \in I.$$

Выражения в квадратных скобках принадлежат кольцу PD^λ и, следовательно, ввиду минимальности τ , они равны нулю, откуда следует, что $\alpha_i \bar{g}_i x = x \alpha_i \bar{g}_i$. Согласно лемме 7, $\alpha_i \bar{g}_i \in PD(G)$, откуда $\tau \in PD(G)$, что и требовалось.

Таким образом, мы доказали, что (D^λ) влечет $(D^{\lambda+1})$. Пусть теперь λ — минимальный номер, для которого $I \cap PD^\lambda \neq 0$. Ясно, что λ не может быть предельным. Ввиду предыдущего остается единственная возможность $\lambda = 0$. Лемма доказана.

Предложение 2. *Предположим, что $H \triangleleft G$ и $H = E(H)$. Если $I \neq 0$ — идеал групповой алгебры PG , то $I \cap PD_G(H) \neq 0$.*

Доказательство. Как в доказательстве предыдущей леммы, рассмотрим множество элементов идеала I вида $\tau = \alpha_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \bar{g}_i$, $\alpha_i \in PH$,

$\bar{g}_i \in G/H$, и предположим, что τ — элемент с наименьшим числом ненулевых слагаемых. Так как ненулевые элементы $s\tau t$, $s, t \in PH$, также имеют n слагаемых, то элементы $s\alpha_i t$, $st \in PH$, образуют идеал I_1 алгебры PH ; ввиду леммы 8, мы можем выбрать τ так, что $0 \neq \alpha_1 \in PD(H)$. Если $n = 1$, то доказательство закончено. Пусть $n > 1$. При $x \in C_H(g_1, \dots, g_m)$, где $g_1, \dots, g_m$ — элементы группового базиса, входящие в разложение элемента α_1 с ненулевыми коэффициентами, вычислим

$$x^{-1}\tau x - \tau = \sum_{i=2}^n [x^{-1}\alpha_i x (x^{-1}\bar{g}_i x \bar{g}_i^{-1}) - \alpha_i] \bar{g}_i \in I.$$

Ввиду минимальности τ , получаем $\alpha_i \bar{g}_i x = x \alpha_i \bar{g}_i$. В силу леммы 7, $\alpha_i \bar{g}_i \in PD_G(H)$, откуда $\tau \in PD_G(H)$.

Доказательство теоремы. Положим $\Sigma = D(T)$, где T — из предложения 1. Тогда $D_G(T) = D(T) = \Sigma$ и теорема вытекает из предложения 2.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
3 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ I. Kaplansky, Am. Math. Monthly, 77, № 5, 445 (1970). ² D. S. Passman, Canad. J. Math., 21, 1137 (1969). ³ А. Е. Залесский, Вестн. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 2, 13 (1970). ⁴ C. R. Hampton, D. S. Passman, On the Semisimplicity of Group Rings of Solvable Groups, Preprint. ⁵ А. Е. Залесский, Докл. АН БССР, 13, № 6, 485 (1969).