

УДК 518.731.343.1

МАТЕМАТИКА

Д. ЗОННЕВЕНД (Венгрия)

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ПРЕВОСХОДСТВА ИГРОКА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 19 VI 1972)

1. Рассмотрим линейную дифференциальную игру (см. (1))

$$\dot{z} = Cz + u - v, \quad (1)$$

где z — вектор n -мерного пространства R^n , C — квадратная постоянная матрица, u и v — параметры управления, находящиеся в распоряжении двух игроков, в дальнейшем называемых догоняющим и убегающим. Эти параметры принадлежат замкнутым выпуклым подмножествам R^n : P и Q . В качестве терминального многообразия задано линейное подпространство M . Целью догоняющего является по возможности быстро привести точку z , $z(0) = z_0$, на M , убегающий стремится препятствовать этому. Игроки в каждый момент $t \geq 0$ выбирают свои управления $u(t)$ и $v(t)$ (предположим, что эти функции измеримы), ничего не зная о поведении своего противника в моменты $s > t$. (Ниже подробнее описывается информированность догоняющего.)

2. Введем обозначение π для оператора ортогонального проектирования из R^n , параллельно M , на его ортогональное дополнение L , $M + L = R^n$. Далее обозначим при двух заданных выпуклых множествах A и B через $A - B$ множество тех векторов w , для которых при любом векторе $b \in B$ найдется вектор $a \in A$ такой, что $b + w = a^*$.

Предположение 1. Существует дифференцируемая и монотонно возрастающая функция $I(\tau)$, удовлетворяющая условиям

$$I(0) = 0, \quad I(\tau) \geq \tau \quad \text{при} \quad \tau \geq 0; \quad (2)$$

$$\hat{W}(\tau) = \pi e^{\tau C} P - \pi e^{t(\tau)C} \cdot Q I(\tau) \text{ не пусто для всех } \tau \geq 0. \quad (3)$$

Заметим, что из уравнения (1) по формуле Коши следует

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} \left(z_0 + \int_0^t e^{-sC} u(s) ds - \int_0^t e^{-sC} v(s) ds \right). \quad (1')$$

Предположение 2. Пусть задано начальное положение z_0 . Предполагаем, что следующее включение имеет решение:

$$-\pi e^{(T_0+t_1)C} \left(z_0 + \int_0^{T_0} e^{-sC} \tilde{u}(s) ds \right) \in \int_0^{t_1} \hat{W}(\tau) d\tau = W(t_1), \quad (4)$$

где T_0, t_1 — неотрицательные числа, связанные соотношением $T_0 + t_1 = I(t_1)$, и $\tilde{u}(s)$, $0 \leq s \leq T_0$, — некоторое допустимое управление догоняющего.

Теорема 1. При выполнении предположений 1 и 2 игру можно закончить из начального положения z_0 : а) до момента $T_0 + t_1$, б) точно в момент $T_0 + t_1$.

* Если $A - B$ непусто, то говорят, что имеет место вычитаемость.

При доказательстве утверждений а), б), здесь даются два метода конструктивного построения управления догоняющего. На отрезке $0 \leq s \leq T_0$ в обоих случаях $u(s)$ полагается равным $\tilde{u}(s)$.

(1') преобразуется при $t = T_0 + t_1 = I(t_1)$ к виду

$$\pi z(T_0 + T_1) = \pi e^{(T_0+t_1)C} \left(z_0 + \int_0^{T_0} e^{-sC} u(s) ds \right) + \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-s)C} u(T_0 + s) ds - \\ - \int_0^{t_1} \pi e^{(I(t_1)-I(t_1-s))C} v(I(t_1) - s) \dot{I}(t_1 - s) ds;$$

здесь последнее слагаемое возникает из последнего слагаемого в (1') при замене переменного $s = I(\tau)$.

Для первого доказательства утверждений а) и б) управление $u(\tau)$ на отрезке $[T_0, T_0 + t_1]$ строится как измеримое по s решение линейного уравнения

$$\pi e^{(t_1-s)C} u(T_0 + s) = \pi e^{I(t_1-s)C} v(I(t_1) - I(t_1 - s)) \dot{I}(t_1 - s) + w(t_1 - s).$$

где (см. (4))

$$-\pi e^{(T_0+t_1)C} \left(z_0 + \int_0^{T_0} e^{-sC} \tilde{u}(s) ds \right) = \int_0^{t_1} \tilde{w}(s) ds, \quad \tilde{w}(s) \in \hat{W}(s).$$

Заметим, что при этом в моменты $(I(t_1) - s)$ догоняющий использует значения фазовых переменных $\bar{z}$ (для определения значения v) в моменты s' :

$$I(t_1) - I(s) \leq s' \leq I(t_1) - I(s) + \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \delta. \quad (5)$$

Для другого доказательства утверждения а) и б) $u(s)$ на отрезке $[T_0, T_0 + t_1]$ строится, следуя методу (2). Введем для этой цели при $s \geq T_0 = I(t_1) - t_1$, $t = I(t_1) - s$ вектор-функцию

$$p(t_1, s) = e^{tC} z^u(t_1, s) + e^{I(t)C} z^v(t_1, s),$$

где

$$z^u(t_1, s) = e^{sC} \left(z_0 + \int_0^s e^{-\tau C} u(\tau) d\tau \right), \quad z^v(t_1, s) = \int_0^{I(t_1)-I(t)} e^{I(t_1)-I(t)-\tau} v(\tau) d\tau.$$

Тогда включение (4) переписывается в виде

$$\pi p(t_1, T_0) = \pi e^{(T_0+t_1)C} \left(z_0 + \int_0^{T_0} e^{-\tau C} u(\tau) d\tau \right) \in W(t_1).$$

На основе включения

$$W(I(t_1) - s) = W(t) \subseteq \left(W(t - \varepsilon) + \int_{t-\varepsilon}^t \pi e^{\tau C} P d\tau \right) * \int_{I(t-\varepsilon)}^{I(t)} \pi e^{I(t_1)-\tau} v(\tau) d\tau,$$

и соотношения

$$p(t_1, s + \varepsilon) = p(t_1, s) + \int_s^{s+\varepsilon} e^{T_0+t_1-\tau} u(\tau) d\tau - \int_{I(t_1)-I(t)}^{I(t_1)-I(t-\varepsilon)} e^{(I(t_1)-\tau)C} v(\tau) d\tau,$$

мы заключаем, что из включения

$$\pi p(t_1, s) \in W(I(t_1) - s) \quad (6)$$

вытекает разрешимость в классе допустимых управлений $u(\tau)$, $T_0 + t_1 - s - \varepsilon \leq \tau \leq T_0 + t_1 - s$, для любого малого $\varepsilon > 0$ и при любом управле-

нии $v(r)$, $I(t_i) - I(s + \varepsilon) \leq r \leq I(t_i) - I(s)$, включения

$$\pi p(t_i, s + \varepsilon) \in W(I(t_i) - s - \varepsilon); \quad (6')$$

это выражает, что прогноз не ухудшается, но может улучшиться.

Производя подобные ε -шаги, получаем, исходя из (4'),

$$\pi p(t'_1, T'_0 + t'_1) \in W(0),$$

где $T'_0 + t'_1 = I(t'_1)$, $I(t'_1) \leq I(t_1)$.

В силу равенств $p(t, T + t) = z(T + t)$ для всех $T, t \geq 0$, удовлетворяющих $T + t = I(t)$ и $W(0) = 0$, последнее включение означает, что игра закончена в момент $T'_0 + t'_1$. Заметим, что практические возражения против допустимости использования догоняющим значений управлений v частично снимаются, если речь идет о прошлых значениях, как в нашем случае при строгом неравенстве (2). В конкретных играх $I(\tau)$ может определяться не однозначно требованиями (2), (3). Ее можно выбрать, удовлетворяя дополнительным требованиям (типа удобства практической реализации предписания относительно гарантированного момента поимки $T_0 + t_1$ или начального управления $\tilde{y}(s)$, $0 \leq s \leq T_0$).

3. Аналогичное обобщение возможно и для метода, предложенного в (3). Для простоты ограничимся формулированием соответствующих результатов для игр с линейным подмножеством M .

Предположение 3. Существует монотонно возрастающая функция $I(\tau)$ со свойствами (2), для которой для индуктивно определенных ниже множеств $\theta_v(\tau_i)$ имеет место вычитаемость при всех разбиениях γ : $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_1$:

$$\theta_v(0) = 0, \quad \theta_v(\tau_{i+1}) = \left(\theta_v(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{sC} P ds \right) * \int_{I(\tau_i)}^{I(\tau_{i+1})} \pi e^{sC} Q ds. \quad (7)$$

Тогда, очевидно, существует альтернированный интеграл (см. (3))

$$\tilde{W}(t) = \int_{M, 0}^t (\pi e^{sC} P * \pi e^{I(s)C} Q \dot{I}(s)) ds. \quad (8)$$

Теорема 2. При выполнении предположений 2 и 3 игру можно закончить из начального положения z : а) до момента $T_0 + t_1$; б) в момент $T_0 + t_1$ (входящее в предположение 2 выражение $W(t_1)$ определяется формулой (9) и равенством $W(t_1) = \pi W(t_1)$).

Доказательство этой теоремы аналогично второму доказательству теоремы 1. Заметим, что вычисления, требуемые методом, сильно упрощаются, если можно так выбрать функцию I , что имеет место полное выметание (говорят, что множество B полностью выметает множество A , если $A = (A - B) + B$) в первом приближении альтернированного интеграла:

$$\theta_{v_0}(s) + \int_0^s \pi e^{I(\tau)C} Q \dot{I}(\tau) d\tau = \int_0^s \pi e^{\tau C} P d\tau \quad \text{для всех } 0 \leq s \leq t_1, \quad (9)$$

где v_0 — тривиальное разбиение отрезка $[0, s]$. Опираясь на алгебраические соотношения, которые верны при полном выметании, можно легко доказать, что альтернированный интеграл в таком случае совпадает со своим первым приближением $\pi \tilde{W}(s) = \theta_{v_0}(s)$ для всех $0 \leq s \leq t_1$. Из соотношения (9) следует условие (3), если дополнительно предполагать, что $W(t)$ полностью выметает $W(t + \tau)$ для всех $t, \tau \geq 0$. Сильное превосходство типа (3) на некотором отрезке времени $[0, t']$, где $W(s) \geq 0$ до момента t' , допускает существование альтернированного интеграла еще на некотором отрезке $[t', t_1]$, где не имеет места превосходство типа (3).

4. В качестве примера рассмотрим задачу мягкой встречи двух изотропных ракет (см. контрольный пример в (1)):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \alpha \dot{x} &= \rho u, & x, y &\in R^k, & |u| &\leq 1, & |v| &\leq 1, \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} &= \sigma v, & \alpha, \beta, \rho, \sigma &- \text{положительные константы},\end{aligned}\quad (10)$$

$$M: \{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \mid x = y, \dot{x} = \dot{y}\}.$$

Здесь функция $I(\tau)$ однозначно определяется требованием (3):

$$I(\tau) = \frac{1}{\beta} \lg \left(\frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha\tau} - 1) + 1 \right). \quad (11)$$

Поскольку $I(\tau)$ лежит между числами 1 и $\alpha\beta^{-1}$ надо предполагать

$$\alpha \geq \beta, \quad \rho/\alpha > \sigma/\beta. \quad (12)$$

Последнее неравенство обеспечит выполнение (3) и имеет простой смысл: из уравнений (10) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует момент $t(\varepsilon)$, такой что для $t \geq t(\varepsilon)$

$$|\dot{x}(t)| < \rho/\alpha + \varepsilon, \quad |\dot{y}(t)| < \sigma/\beta + \varepsilon.$$

Анализ включения (4) показывает, что поимка возможна из всех начальных положений z_0 . Заметим, что то же самое верно и при более общем условии

$$\rho/\alpha \geq (2 - \alpha/\beta), \quad \rho/\alpha > \sigma/\beta, \quad (12')$$

потому что случай (12') можно свести к случаю (12).

5. Предложенные выше методы преследования существенно усиливаются, если в (4) вместо z_0 мы пишем какое-то более позднее значение $z(T)$. Это означает, что сперва разыгрывается начальная игра, в которой догоняющий стремится привести фазовую точку в такое положение $z(T) \in M_0$, для которого существует конечное t_1 , удовлетворяющее (4). Эта начальная игра имеет терминальное многообразие M_0 и терминальную плату $T + I(t_1(z(T)))$.

Простой пример: пусть $\hat{W}(\tau) \equiv 0$, для всех $\tau \geq 0$. Тогда M_0 является множеством тех векторов z_0 , при которых разрешимо уравнение

$$\pi e^{I(t_1)C} \left(z_0 + \int_0^{T_0} e^{-sC} u(s) ds \right) = 0, \quad T_0 + t_1 = I(t_1)$$

для некоторого управления $u(s)$ и конечного числа t_1 . M_0 выпукло. Таким образом можно рассматривать и такие игры, которые нельзя закончить в никакой заранее фиксированный момент.

Автор выражает благодарность М. С. Никольскому за помощь.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
5 VI 1972

Государственный университет им. Л. Этнеша
Будапешт, Венгрия

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, УМН, 21, в. 4 (130), 249 (1966). ² Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 5, 1278 (1967). ³ Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 4, 760 (1967). ⁴ П. Б. Гусятников, М. С. Никольский, ДАН, 184, № 3, 518 (1969). ⁵ Б. Н. Пшеничный, Автоматика и телемеханика, № 1, 65 (1968). ⁶ Л. С. Понтрягин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 112, 30 (1971). ⁷ Б. Н. Пшеничный, М. И. Сагайдак, Кибернетика, № 2, 54 (1970). ⁸ Н. Н. Барабанова, А. И. Субботин, ПММ, 35, № 3, 386 (1971). ⁹ Д. Зонпевенд, ДАН, 204, № 6 (1972). ¹⁰ У. С. Хо, J. Opt. Theory and Appl., 6, № 3, 179 (1971).