

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Т. Г. АХМЕДОВ

О МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ СТИЛЬТЪЕСА С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

В этой работе определяется множество точек абсолютной сходимости интеграла Стильтьеса

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z^{\varphi(t)} e^{-zf(t)} dA(t)$$

в предположении, что $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ и $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ — комплексные функции действительного переменного, причем $\varphi_1(t) = \operatorname{Re} \varphi(t)$ — нечетная функция, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — монотонные положительные функции*, $z^{\varphi(t)}$ — одна из ветвей функции $e^{\varphi(t) \ln z}$, однозначной в плоскости z с разрезом вдоль отрицательной части вещественной оси, и $A(t)$ — комплекснозначная функция ограниченных вариаций на любом конечном отрезке вещественной оси. Кроме того, определяется множество, на котором интеграл $I(z)$ не сходится абсолютно.

Заметим, что интеграл $I(z)$ при соответствующем подборе функции $A(t)$ превратится, в частности, в ряд типа Лорана — Дирихле с комплексными показателями:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z},$$

где m_n и λ_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — вообще говоря, комплексные числа, причем $\operatorname{Re} m_n \geq 0$ при $n > 0$ и $\operatorname{Re} m_n < 0$ при $n < 0$.

Введем обозначения:

$$I^{(1)}(z) = \int_0^{\infty} z^{\varphi(t)} e^{-zf(t)} dA(t), \quad I^{(2)}(z) = \int_{-\infty}^0 z^{\varphi(t)} e^{-zf(t)} dA(t), \quad (1)$$

$$\rho_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\varphi_1(t)}, \quad \rho_2 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\varphi_1(t)},$$

$$r = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t}, \quad d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_2(t)}{t}.$$

Заметим, что интеграл $I^{(1)}(z)$ может быть представлен в виде

$$I^{(1)}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} z^{\varphi(t)} e^{-zf(t)} dA(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N I_n(z). \quad (2)$$

В случае расходимости интеграла $J_1(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|$, где $\theta = \arg z$, введем в рассмотрение величину

$$a_1(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \int_0^r e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|. \quad (3)$$

* Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ меняют знак, оставаясь монотонными, то легко заметить, как изменяется множество точек, в котором $I(z)$ не сходится абсолютно.

В силу (1) и (3) имеем

$$|I_n(z)| \leq \max_{n \leq t \leq n+1} \exp \{ \varphi_1(t) \ln |z| - f_1(t)x + f_2(t)y \} \cdot \int_n^{n+1} e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)| \leq \\ \leq C \exp \left\{ (n+1) \left[\frac{\ln |z|}{\rho_1 - \varepsilon} + y(d + \varepsilon) - x(r - \varepsilon) + a_1(\theta) + \varepsilon \right] \right\},$$

где C — постоянная, не зависящая от n .

Заметим, что для точек z с аргументом θ , удовлетворяющих условию

$$|z| < \exp \{ \rho_1 [xr - yd - a_1(\theta)] \}, \quad (4)$$

в то же время справедливо неравенство

$$\frac{\ln |z|}{\rho_1 - \varepsilon} + y(d + \varepsilon) - x(r - \varepsilon) + a_1(\theta) + \varepsilon < \delta < 0 \quad (5)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$, и потому $|I_n^{(1)}(z)| < Ce^{n\delta}$, т. е. $I^{(1)}(z)$ сходится абсолютно в точках z с аргументом θ , удовлетворяющих неравенству (4) и находящихся вне единичного круга $|z| \leq 1$; множество таких точек z обозначим через $A_1(\theta)$. Очевидно, при изменении θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, мы получим множество $A_1 = \bigcup_{(0)} A_1(\theta)$, состоящее из точек $z = x + iy$ абсолютной сходимости $I^{(1)}(z)$, удовлетворяющих условиям:

$$|z| > 1, \quad |z| < \exp \{ \rho_1 [xr - yd - a_1(\theta)] \}$$

при любых $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Заметим, что в случае $|z| \leq 1$, в силу того, что $\varphi_1(t) \geq t / (\rho_2 + \varepsilon)$, неравенство (5) заменится неравенством

$$\frac{\ln |z|}{\rho_2 + \varepsilon} + y(d + \varepsilon) - x(r - \varepsilon) + a_1(\theta) + \varepsilon < \delta < 0. \quad (6)$$

Обозначая через $A_2(\theta)$ множество точек z с аргументом θ , удовлетворяющих условиям

$$|z| \leq 1, \quad |z| \leq \exp \{ \rho_2 [xr - yd - a_1(\theta)] \},$$

мы утверждаем, что $I^{(1)}(z)$ сходится абсолютно также в точках множества $A_2 = \bigcup_{(0)} A_2(\theta)$. Следовательно, $I^{(1)}(z)$ сходится абсолютно в каждой точке множества $A = A_1 \cup A_2$.

Займемся теперь определением множества точек, в которых $I^{(1)}(z)$ не сходится абсолютно. Очевидно, имеем

$$\int_0^{r_n} |z^{\varphi(t)} e^{-z f(t)} dA(t)| \geq \\ \geq \min_{0 \leq t \leq r_n} \exp \{ \varphi_1(t) \ln |z| - t [x(r + \varepsilon) - y(d - \varepsilon)] \} \exp \{ r_n [a_1(\theta) - \varepsilon] \}. \quad (7)$$

Обозначим через $B_i(\theta)$, $i = 1, \dots, 4$, множество точек $z = x + iy$ с аргументом θ , расположенных вне единичного круга и удовлетворяющих, соответственно, условиям:

- 1) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad a_1(\theta) > xr$;
- 2) $x \geq 0, \quad y < 0, \quad a_1(\theta) > xr - yd$,
- 3) $x < 0, \quad y \geq 0, \quad a_1(\theta) > 0$;
- 4) $x < 0, \quad y < 0, \quad a_1(\theta) + yd < 0$.

Кроме того, обозначим через $B_i^*(\theta)$, $i = 1, \dots, 4$, множество точек $z = x + iy$ с аргументом θ , расположенных внутри единичного круга

$|z| \leq 1$ и удовлетворяющих соответственно условиям:

- 1) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \exp \{ \rho_2 [xr - a_1(\theta)] \} < |z| \leq 1$;
- 2) $x \geq 0, \quad y < 0, \quad \exp \{ \rho_2 [xr - yd - a_1(\theta)] \} < |z| \leq 1$;
- 3) $x < 0, \quad y \geq 0, \quad \exp \{ \rho_2 [xr - yd - a_1(\theta)] \} < |z| \leq 1$;
- 4) $x < 0, \quad y < 0, \quad \exp \{ \rho_2 [yd + a_1(\theta)] \} < |z| \leq 1$.

Неравенство (7) показывает, что интеграл $I^{(1)}(z)$ не сходится абсолютно в точках множеств $B^{(1)}(\theta) = \bigcup_{i=1}^4 B_i(\theta)$, $B^{(2)}(\theta) = \bigcup_{i=1}^4 B_i^*(\theta)$ и, следовательно, в точках множеств $B^{(1)} = \bigcup_{(\theta)} B^{(1)}(\theta)$, $B^{(2)} = \bigcup_{(\theta)} B^{(2)}(\theta)$, а также во множестве $B = B^{(1)} \cup B^{(2)}$.

Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 1. Если функции $\varphi(t)$, $f(t)$ и $A(t)$ удовлетворяют условиям (1) и (3), то интеграл $I^{(1)}(z)$ сходится абсолютно в точках множества A и не сходится абсолютно в точках множества B .

Отметим, что в случае, когда $J_1(\theta) = \int_0^\infty e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|$ сходится (т. е. $a_1(\theta) \leq 0$ или $a_1(\theta) = \infty$), рассматривается величина

$$a_2(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \int_r^\infty e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|, \quad a_2(\theta) \leq 0$$

Введем обозначения:

$$A_3 = \bigcup_{(\theta)} A_3(\theta), \quad A_4 = \bigcup_{(\theta)} A_4(\theta), \quad A^* = A_3 \cup A_4,$$

где $A_3(\theta)$ и $A_4(\theta)$ — множества точек z с аргументом θ , удовлетворяющих условию $|z| < \exp\{\rho_1(xr - yd - a_2(\theta))\}$ и расположенных соответственно в областях $|z| \geq 1$ и $|z| \leq 1$. Кроме того, из множества точек z с аргументом θ , удовлетворяющих условиям $|z| \geq 1$ и $|z| > \exp\{\rho_2[xr - yd - a_2(\theta)]\}$, выделяется множество $B_1^*(\theta)$ при $x < 0$, $y \geq 0$ и рассматривается множество $B^* = \bigcup_{(\theta)} B_1^*(\theta)$.

Теорема 2. Если интеграл $J_1(\theta)$ сходится, то интеграл $I^{(1)}(z)$ сходится абсолютно в множестве A^* и не сходится абсолютно в множестве B^* .

Из теорем 1 и 2 выводится ряд следствий, например, в случае, когда $\rho_1 = 0$, а также $\rho_2 = \infty$ и другие.

Аналогично может быть изучена абсолютная сходимость интеграла $I^{(2)}(z)$. Обозначим:

$$\rho_3 = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\varphi_1(t)}, \quad \rho_4 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\varphi_1(t)}, \quad r_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_1(t)}{t}, \quad d_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_2(t)}{t}.$$

В случае расходимости интеграла $J_2(\theta) = \int_{-\infty}^0 e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|$ рассматривается

$$a_3(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \int_{-r}^0 e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|.$$

Далее, обозначим через $D_i(A)$, $i = 1, 2$, множества точек z с аргументом θ , удовлетворяющих соответственно неравенствам $|z| > \exp\{\rho_k[xr_1 - yd_1 - a_3(\theta)]\}$, $k = 3, 4$, и расположенных также соответственно в области $|z| \geq 1$ и внутри $|z| \leq 1$:

$$D_i = \bigcup_{(\theta)} D_i(\theta), \quad i = 1, 2, \quad D = D_1 \cup D_2.$$

Наконец, обозначим через $E_i(\theta)$, $i = 1, \dots, 4$, множества точек z с аргументом θ , удовлетворяющих неравенству

$$1 \leq |z| < \exp\{\rho_3[xr_1 - yd_1 + a_3(\theta)]\}$$

и подчиненных соответственно условиям:

- 1) $x \geq 0, y \geq 0;$
- 2) $x \geq 0, y < 0;$
- 3) $x < 0, y \geq 0;$
- 4) $x < 0, y < 0;$

причем

$$E_i = \bigcup_{(\theta)} E_i(\theta), \quad E = \bigcup_{i=1}^4 E_i.$$

Через $E_i^*(\theta)$, $i = 1, \dots, 4$, обозначим множества точек z , с аргументом θ , лежащих внутри круга $|z| \leq 1$ и удовлетворяющих соответственно условиям:

- 1) $x \geq 0, y \geq 0, xr_1 + a_3(\theta) > 0;$
- 2) $x \geq 0, y < 0, xr_1 - yd_1 + a_3(\theta) > 0;$
- 3) $x < 0, y \geq 0, a_3(\theta) > 0;$
- 4) $x < 0, y < 0, a_3(\theta) - yd_1 > 0;$

причем

$$E_i^* = \bigcup_{(\theta)} E_i^*(\theta), \quad E^* = \bigcup_{i=1}^4 E_i^*, \quad E_* = E \cup E^*.$$

Теорема 3. Если интеграл $J_2(\theta)$ расходится, то интеграл $I^{(2)}(z)$ сходится абсолютно на множестве D и не сходится на множестве E_* .

В случае сходимости интеграла $J_2(\theta)$ вместо величины $a_3(\theta)$ рассматривается

$$a_4(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \int_{-\infty}^{-r} e^{-\varphi_2(t)\theta} |dA(t)|.$$

Через $K_i(\theta)$, $i = 1, 2$, обозначаются множества точек z с аргументом θ , удовлетворяющих соответственно неравенствам $|z| > \exp\{\rho_k[xr_1 - yd_1 - a_k(\theta)]\}$, $k = 3, 4$, и расположенных также соответственно в области $|z| \geq 1$ и внутри круга $|z| \leq 1$; причем $K_i = \bigcup_{(\theta)} K_i(\theta)$ и $K = K_1 \cup K_2$.

Кроме того, $H(\theta)$ означает множество точек z с аргументом θ , подчиненных условиям $|z| < \exp\{\rho_4[xr_1 - yd_1 - a_4(\theta)]\}$ при $x < 0$ и $y \geq 0$, причем $H = \bigcup_{(\theta)} H(\theta)$.

Теорема 4. Если интеграл $J_2(\theta)$ сходится, то интеграл $I^{(2)}(z)$ сходится абсолютно в множестве K , не сходится абсолютно в множестве H .

Из теорем 3 и 4 можно также вывести ряд следствий, например, в случае $\rho_3 = 0$ и $\rho_4 = 0$ и другие.

В заключение отметим, что интеграл $I(z)$, очевидно, сходится абсолютно на множестве $A \cup D$, определенном в теоремах 1 и 3, а также на множестве $A^* \cup K$, определенном в теоремах 2 и 4. Легко определяется также множество точек, в котором интеграл $I(z)$ не сходится абсолютно.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Л. Лунц, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 14, 2 (1961). ² Т. К. Ахмедов, Изв. АН АзербССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 5 (1963).