

Г. Г. КАЗАРЯН

СРАВНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 V 1972)

Будем пользоваться следующими обозначениями и терминологией:
 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — точка n -мерного евклидова пространства R_n , $R_n^0 =$
 $= \left\{ \xi: \xi \in R_n, \prod_{k=1}^n \xi_k \neq 0 \right\}$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -мерного евклидова
пространства E_n ; Σ_n — целочисленная решетка точек (мультииндексов)
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Как обычно, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha =$
 $= D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$.

Полным символом данного дифференциального оператора $P(x, D) =$
 $= \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) D^{\alpha}$, $x \in \Omega$, Ω — область в E_n , называют полином $P(x, \xi) =$
 $= \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ от $\xi \in R_n$. Здесь для каждой точки $x \in \Omega$ сумма берется по
конечному множеству $\mathfrak{A}(x) = \{\alpha: \alpha \in \Sigma_n, \gamma_{\alpha}(x) \neq 0\}$.

Определение 1. (см. (1)). Говорят, что оператор $Q(D) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} D^{\alpha}$
с постоянными коэффициентами (полином $Q(\xi)$) слабее оператора
 $P(D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} D^{\alpha}$ (полинома $Q(\xi)$) и записывают $Q < P$, если

$$\tilde{Q}(\xi) / \tilde{P}(\xi) \leq C \quad \forall \xi \in R_n, \quad (1)$$

где полином $\tilde{R}(\xi)$ (называемый функцией Л. Хёрмандера) для данного
полинома $R(\xi)$ определяется так:

$$\tilde{R}(\xi)^2 = \sum_{|\mu| \geq 0} |R^{(\mu)}(\xi)|^2, \quad R^{(\mu)}(\xi) = D^{\mu} R(\xi),$$

Определение 2. (см. (1)). Говорят, что дифференциальный опера-
тор $P(x, D)$ (полином $P(x, \xi)$) имеет постоянную силу в Ω если для
любых фиксированных точек $x, y \in \Omega$

$$\tilde{P}(x, \xi) / \tilde{P}(y, \xi) \leq C_{x, y} \quad \forall \xi \in R_n. \quad (2)$$

где $\tilde{P}(x, \xi)^2 = \sum_{|\mu| \geq 0} |D_{\xi}^{\mu} P(x, \xi)|^2$ — функция Л. Хёрмандера.

Определение 3. Характеристическим многогранни-
ком (х.м.) для данного набора мультииндексов $\mathfrak{A} = \{\alpha^k\}_{k=1}^N$ называется
наименьший выпуклый многогранник в Σ_n , содержащий все точки $\alpha^k \in \Sigma_n$,
 $k = 1, \dots, N$, х.м. для данного полинома $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) \xi^{\alpha}$ определя-
ется как х.м. набора $\mathfrak{A}(x) = \{\alpha: \alpha \in \Sigma_n, \gamma_{\alpha}(x) \neq 0\}$.

Определение 4. Х.м. $\mathfrak{A}$ называется полным, если $\mathfrak{A}$ имеет верши-
ны в начале координат и на всех осях координат Σ_n . Полный х.м. $\mathfrak{A}$ называет-

ся правильным (вполне правильным (в.п.)), если все координаты внешних нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ неотрицательны (положительны).

Л. Хёрмандеру ⁽¹⁾ принадлежит следующий результат: однородный полином $P(\xi)$ порядка m сильнее любого полинома $Q(\xi)$ порядка не выше m тогда и только тогда, когда $P(\xi)$ эллиптический, т. е. из $P(\xi) = 0$ следует $\xi = 0$.

Л. Р. Волевич и С. Г. Гиндикин дали в ⁽²⁾ необходимое и достаточное условие того, чтобы многочлен $P(\xi)$ с правильным х.м. $\mathfrak{N}(P)$ был сильнее любого многочлена $Q(\xi)$ с х.м. $\mathfrak{N}(Q) \subseteq \mathfrak{N}(P)$.

Здесь, опираясь на результаты В. П. Михайлова ⁽³⁾ и наши результаты ^(4, 5), мы решаем следующие задачи:

I. Для данного набора мультииндексов $\mathfrak{A} = \{\alpha^k\}_1^N$ с произвольным х.м. $\mathfrak{N}$ найти необходимые и достаточные условия на коэффициенты $\{\gamma_k\}_1^N$, чтобы полином $P(\xi) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \xi^{\alpha^k}$ был сильнее любого полинома $Q(\xi) = \sum_{k=1}^N q_k \xi^{\alpha^k}$.

II. Для данного полинома $P(\xi)$ с произвольным х.м. $\mathfrak{N}$ описать множество полиномов $\{Q(\xi)\}$, более слабых, чем $P(\xi)$.

III. Найти алгебраические условия на полный символ $P(x, \xi)$, чтобы оператор $P(x, D)$ с произвольным х.м. $\mathfrak{N}(P)$ имел постоянную силу.

Задача I решается в общем виде. Ее решение для мультииндексов $\mathfrak{A}$ с правильным х.м. получено в ⁽²⁾. Задачи II и III решаются в общем виде в отношении характеристических многогранников, но при некоторых ограничениях (менее жестких, чем в ⁽²⁾) на характер полиномов $P(\xi)$ и $P(x, \xi)$.

1°. Для формулировки полученных результатов нам необходимы следующие определения.

Пусть $\mathfrak{N}$ — полный х.м. в Σ_n . Обозначим через $\mathfrak{N}_i^k$, $i = 1, \dots, M_k'$; $k = 0, 1, \dots, n-1$, k -мерные грани х.м. $\mathfrak{N}$.

Определение 5. Грань $\mathfrak{N}_i^k$, $i = 1, \dots, M_k$; $k = 0, \dots, n-1$, х.м. $\mathfrak{N}$ назовем вполне правильной (в.п.), если среди $(n-1)$ -мерных, опорных к $\mathfrak{N}$, гиперплоскостей, содержащих грань $\mathfrak{N}_i^k$ и не содержащих граней размерности больше k , существует гиперплоскость, все координаты внешней нормали которой положительны. В дальнейшем эту нормаль будем называть внешней нормалью грани $\mathfrak{N}_i^k$.

Пусть $\mathfrak{N}(P)$ — х.м. многочлена $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$.

Определение 6. Грань $\mathfrak{N}_i^k$, $1 \leq i \leq M_k'$; $0 \leq k \leq n-1$, х.м. $\mathfrak{N}(P)$ полинома $P(\xi)$ назовем P -регулярной, если полином $P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{N}_i^k} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ не обращается в нуль в $R_n^{(0)}$.

Следующее предложение дает решение задачи I.

Теорема 1. Пусть задан набор мультииндексов $\mathfrak{A} = \{\alpha^k\}_1^N$ с х.м. $\mathfrak{N}$.

Полином $P(\xi) = \sum_{k=1}^N q_k \xi^{\alpha^k}$ сильнее любого полинома $Q(\xi) = \sum_{k=1}^N q_k \xi^{\alpha^k}$

тогда и только тогда, когда все в.п. грани х.м. $\mathfrak{N}$ P -регулярны.

Введем далее следующие обозначения: для данной точки $\alpha \in \Sigma_n$ положим

$$D\alpha = \{\beta: \beta \in \Sigma_n, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\};$$

для набора $\mathfrak{A} = \{\alpha^k\}$ с х.м. $\mathfrak{N}$ положим $D\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha^k \in \mathfrak{A}} D\alpha^k$; через $\tilde{\mathfrak{N}}$ обозначим х.м. набора $D\mathfrak{A}$.

Очевидно, что: а) $\mathfrak{N} \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}$; б) если $\mathfrak{N}$ — правильный многогранник, то $\tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$; в) в.п. грани $\mathfrak{N}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$ совпадают.

Итак, с каждым полиномом $P(\xi)$ мы будем связывать х.м. $\mathfrak{N}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$ с совпадающими в.п. гранями.

Пусть задан полином $P(\xi)$ с х.м. $\mathfrak{N}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$, причем некоторая в.п. $(n-1)$ -мерная грань $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1}$ х.м. $\mathfrak{N}$ ($\tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$ х.м. $\tilde{\mathfrak{N}}$) P -нерегулярна. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_{i_0}^{n-1} \equiv \tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$. Тогда для всех точек $\alpha \in \tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$ $(\lambda, \alpha) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k = d > 0$, а для точек $\alpha \in \tilde{\mathfrak{N}} \setminus \tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$ $(\lambda, \alpha) < d$.

Положим $d_\lambda = d_\lambda \{P^{(1)}(\xi)\} = \max (\lambda, \alpha)$, причем максимум берется по тем $\alpha \in \tilde{\mathfrak{N}} \setminus \tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$, для которых $\sum_{|\mu| \geq 0} |\gamma_{\alpha, \mu}| \neq 0$, где $\{\gamma_{\alpha, \mu}\}$ — коэффициенты полинома $P^{(1)}(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha, \mu} \xi^\alpha$. Через $P_{\lambda\lambda}^{i_0, n-1}(\xi)$ обозначим ту часть многочлена $P(\xi)$, для мультииндексов α которой $(\lambda, \alpha) \leq d_\lambda$, $(\lambda, \alpha) + d \geq 2d_\lambda$, $\tilde{\mathfrak{N}}^*(P) = \{v: v \in \tilde{\mathfrak{N}}, (\lambda, v) \leq d_\lambda\}$.

Следующее предложение дает решение задачи II при некоторых достаточно общих предположениях.

Теорема 2. Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет одному из следующих условий: 1) все в.п. грани х.м. $\mathfrak{N}(P)$ P -регулярны или 2) все в.п. грани х.м. $\tilde{\mathfrak{N}}(P)$, за исключением одной $(n-1)$ -мерной грани $\tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$, P -регулярны, а грань $\tilde{\mathfrak{N}}_{i_0}^{n-1}$ не является P -регулярной, причем если $P^{i_0, n-1}(\xi^0) = 0$ для некоторой точки $\xi^0 \in R_n^{(0)}$, то

$$2a) \sum_{|\mu| \geq 0} |[P_k^{(1)}(\xi^0)]^{i_0, n-1}|^2 \neq 0;$$

2б) в некоторой окрестности точки ξ^0

$$K(\xi) = \bar{P}^{i_0, n-1}(\xi) \cdot P_{\lambda\lambda}^{i_0, n-1}(\xi) + P^{i_0, n-1}(\xi) \cdot \bar{P}_{\lambda\lambda}^{i_0, n-1}(\xi) \geq 0;$$

2в) полином $P^{i_0, n-1}(\xi)$ представляется в виде

$$P^{i_0, n-1}(\xi) = \mathcal{P}^{i_0, n-1}(\xi) \cdot r(\xi),$$

где $\mathcal{P}^{i_0, n-1}(\xi)$ не обращается в нуль в $R_n^{(0)}$.

Тогда в случае 1) любой полином $Q(\xi)$ с х.м. $\tilde{\mathfrak{N}}(Q) \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}(P)$ слабее $P(\xi)$ и, если $\tilde{\mathfrak{N}}(Q) \not\subseteq \tilde{\mathfrak{N}}(P)$, то $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ не сравнимы. В случае 2), 2а), 2б) любой полином $Q(\xi)$ с х.м. $\tilde{\mathfrak{N}}(Q) \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}^*(P)$ слабее $P(\xi)$. В случае 2), 2а), 2б), 2в), если х.м. $\tilde{\mathfrak{N}}(Q) \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}(P)$, $Q(\xi)$ представляется в виде $Q(\xi) = \sum_{k=1}^M q_k(\xi) \cdot r(\xi)$, где $\tilde{\mathfrak{N}}(Q_0) \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}^*(P)$, то полином $Q(\xi)$ слабее полинома $P(\xi)$.

Заметим, что любой полином $Q(\xi)$ с х.м. $\tilde{\mathfrak{N}}(Q) \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}^*(P)$ можно представить в виде $Q(\xi) = Q_0(\xi) + \sum_{k=1}^M Q_k(\xi)$, где $\tilde{\mathfrak{N}}(Q_0) \subseteq \tilde{\mathfrak{N}}^*(P)$, а для всех мультииндексов α полинома $Q_k(\xi)$, $k = 1, \dots, M$, $d_\lambda < (\lambda, \alpha) = r_k < d$. Представление $Q_k(\xi) = q_k(\xi) \cdot r(\xi)$ в условии теоремы означает, что полиномы $Q_k(\xi)$, $k = 1, \dots, M$, обращаются в нуль во всех тех точках $\xi \in R_n^{(0)}$, в которых $P^{i_0, n-1}(\xi) = 0$ (см. также условие 2в). Это последнее условие необходимо, чтобы $Q(\xi)$ был слабее $P(\xi)$.

На примерах можно показать, что условия 2а), 2б) существенны, чтобы $Q(\xi)$ был слабее $P(\xi)$.

2°. Перейдем к задаче III. Для данного полинома $P(x, \xi)$ с множеством мультииндексов $\mathfrak{A}(x)$ через $\tilde{\mathfrak{R}}(x)$ обозначим х.м. набора $D\mathfrak{A}(x)$, где

$$D\mathfrak{A}(x) = \{\beta: \beta \in \Sigma_n, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n, \forall \alpha \in \mathfrak{A}(x)\}.$$

Теорема 3. Пусть полином (от ξ) $P(x, \xi)$ удовлетворяет условию а), если все в.п. грани х.м. $\tilde{\mathfrak{R}}(x)$ P -регулярны, и условиям а), б), в), если в.п. $(n-1)$ -мерная грань $\tilde{\mathfrak{R}}_{i_0}^{n-1} \equiv \mathfrak{R}_{i_0}^{n-1}$ не является P -регулярной.

Тогда оператор $P(x, D)$ имеет постоянную силу в Ω .

Здесь:

а) х.м. $\tilde{\mathfrak{R}}(x)$ не зависит от точки $x \in \Omega$;

б) если в.п. $(n-1)$ -мерная грань $\tilde{\mathfrak{R}}_{i_0}^{n-1}$ (с внешней нормалью λ) х.м. $\tilde{\mathfrak{R}}$ не является P -регулярной, то $d_\lambda(x) \equiv d_\lambda = \max_{x \in \Omega} d_\lambda(x)$ и полином $P^{i_0, n-1}(x, \xi)$ имеет вид

$$P^{i_0, n-1}(x, \xi) = \mathcal{P}^{i_0, n-1}(x, \xi) \cdot r(\xi),$$

где $\mathcal{P}^{i_0, n-1}(x, \xi)$ не обращается в нуль ни в одной точке (x, ξ) , $x \in \Omega$, $\xi \in R_n^{(0)}$;

в) если $P^{i_0, n-1}(x, \xi^0) = 0$ для $\xi^0 \in R_n^{(0)}$, то

$$\text{в. 1)} \quad \sum_{|\mu| \geq 0} | [P_\lambda^{(\mu)}(x, \xi)]^{i_0, n-1} |^2 \neq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

в. 2) в некоторой окрестности точки ξ^0

$$K(x, \xi) = \tilde{P}^{i_0, n-1}(x, \xi) \cdot P_{\lambda\lambda}^{i_0, n-1}(x, \xi) + P^{i_0, n-1}(x, \xi) \cdot \bar{P}_{\lambda\lambda}^{i_0, n-1}(x, \xi) \geq 0,$$

где для каждой фиксированной точки $x \in \Omega$ $d_\lambda(x)$, $P_\lambda^{(\mu)}(x, \xi)$, $K(x, \xi)$ определяется, как в 1° для полинома $P(x, \xi)$ с постоянными коэффициентами.

Условие а) необходимо, а условия б), в) — существенны, для того чтобы оператор $P(x, D)$ имел постоянную силу.

Следующее предложение дает условия, при которых существует константа $C > 0$ такая, что $C_{x,y} \leq C \quad \forall x, y \in \Omega$ в определении 2. В этом случае полином $P(x, \xi)$ будет сильнее любого полинома $Q(\xi)$ с постоянными коэффициентами и с х.м. $\mathfrak{R}(Q) \subseteq \mathfrak{R}(P)$. Полином $P(x, \xi)$, обладающий этим свойством, будем называть полиномом равномерно постоянной силы.

Теорема 4. Пусть заданный дифференциальный оператор $P(x, D)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\tilde{\mathfrak{R}}(x) \equiv \mathfrak{R}$, коэффициенты $\{\gamma_\alpha(x)\}$ определены и ограничены в ограниченной области Ω , причем коэффициенты $\gamma_\alpha(x)$, мультииндексы α которых лежат на в.п. гранях $\mathfrak{R}$, равномерно непрерывны в Ω и удовлетворяют условию

$$0 < \sigma \leq |\gamma_\alpha(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega;$$

б) все в.п. грани х.м. $\tilde{\mathfrak{R}}$ P -регулярны.

Тогда оператор $P(x, D)$ имеет равномерно постоянную силу в Ω .

Ереванский государственный университет

Поступило
25 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. ² Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, Матем. сборн., 75 (117), № 3, 400 (1968). ³ В. П. Михайлов, ДАН, 151, № 2 (1963). ⁴ Г. Г. Казарян, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 105, 66 (1969). ⁵ Г. Г. Казарян, Дифференциальные уравнения, 5, № 5, 911 (1969).