Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 5

УДК 517.949.2 *МАТЕМАТИКА*

М. Л. РАСУЛОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА ГЛАВНОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

(Представлено академиком И. Н. Векуа 29 IV 1972)

Известно, что система дифференциальных уравнений Генки — Ильюшина, характеризующих движение вязкопластических сред, в векторной форме имеет вид ([2])

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\mathbf{P} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\Big[\Delta\mathbf{v} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{\tau_0}{h(\tau_0 + h\eta)}\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}\Big] - \frac{2\tau_0 T}{\rho h^2}\operatorname{grad} h, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, имеющий компоненты v_k, $k=1, 2, 3$, $\mathbf{K}$ — массовая сила, $\mathbf{P}$ — поверхностная сила; каждая из величин ρ, τ_0, η, T имеет определенный физический смысл,

$$h = \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2\right]^{1/2}.$$

С целью создания эффективного алгоритма решения задач для уравнения (1) в настоящей заметке фундаментальная матрица решений системы

$$\partial v / \partial t = a^2(\Delta + \tau\partial\partial')v + f(x, t), \tag{2}$$

находится в конкретном виде (см. формулу (14)), $a^2 = \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)$, $\tau = \frac{1}{\rho} - \frac{2\tau_0}{3h(\tau_0 + \eta h)}$ считаются постоянными числами, $\partial' = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, ∂ — соответствующий столбец символов $\partial/\partial x_k$, $k = 1, 2, 3$.

Нетрудно убедиться в том, что если a^2 и τ действительны, то система (2) является параболической в смысле И. Г. Петровского.

Предположим, что система (2) параболическая по Петровскому. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) при начальном условии

$$v(x, 0) = \Phi(x) \tag{3}$$

в некоторой области D трехмерного эвклидова пространства E^3.

Применением интегрального оператора

$$Af = \int_0^\infty \exp(-\lambda^2 t)\cdot f(t)\,dt$$

к обеим частям системы (2) при $f(x, t) \equiv 0$ с учетом начального условия (3) придем к уравнению

$$a^2(\Delta + \tau\partial\partial')u - \lambda^2 u = -\Phi(x) \tag{4}$$

с комплексным параметром λ.

Известно, что если $\Phi(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, ограниченная в D вместе с производными первого порядка, то вектор-функция $U(x, \lambda, \Phi)$, определяемая формулой

$$u(x, \lambda, \Phi) = \int_D P(x - \xi, \lambda)\frac{\Phi(\xi)}{a^2}\,dD_\xi, \tag{5}$$

является решением системы (4); $P(x, \lambda)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы (4), для которой при $a=1$ имеет место формула [3]

$$P(x,\lambda)=\frac{1}{4\pi|x|}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{\lambda|x|}+\frac{1}{\lambda^2|x|^2}\right)\exp\left(-\lambda|x|\left(\frac{1}{\lambda(1+\tau)^{1/2}|x|}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{\lambda^2|x|^2}\right)\exp\left(-\frac{\lambda|x|}{(\tau+1)^{1/2}}\right)\right]E+\left[-\left(1+\frac{3}{\lambda|x|}+\frac{1}{\lambda^2|x|^2}\right)\exp(-\lambda|x|)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\tau+1}+\frac{3}{\lambda|x|(\tau+1)^{1/2}}+\frac{3}{\lambda^2|x|^2}\right)\exp\left(-\frac{\lambda|x|}{(1+\tau)^{1/2}}\right)\right]\frac{xx'}{|x|^2};\qquad(6)$$

$|x|$ обозначает длину вектора $x'=(x_1, x_2, x_3)$, а x — соответствующий столбец, E — единичная матрица 3-го порядка.

Пусть R — достаточно большое положительное, а δ — достаточно малое положительное число. Обозначим через R_δ область комплексных значений λ, удовлетворяющих неравенствам

$$-({}^1/_4\pi+\delta)\leqslant\arg\lambda\leqslant{}^1/_4\pi+\delta,\qquad|\lambda|\geqslant R.\qquad(7)$$

Обозначим далее через S бесконечный разомкнутый контур, расположенный в области R_δ, достаточно далекая часть которого совпадает с продолжением границы сектора $|\arg\lambda|\leqslant{}^1/_4\pi+\delta$.

Методом контурного интеграла [4] доказывается

Теорема 1. *Если $\Phi(x)$ — непрерывная и ограниченная вектор-функция в некоторой трехмерной области D, то задача Коши* (2), (3) *при $f(x, t)\equiv 0$ имеет решение $v(x, t, \Phi)$, представимое формулой*

$$v(x,t,\Phi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_S\lambda\exp(\lambda^2 t)\,d\lambda\int\limits_D P\left(x-\xi,\frac{\lambda}{a}\right)\frac{\Phi(\xi)}{a^2}\,dD_\xi.\qquad(8)$$

Подставляя (8) в (2), легко убедиться в том, что (8) является решением однородной системы, соответствующей (2). Начальное условие (3) проверяется предварительным вычислением интеграла по λ. Переставляя порядок интегрирования по ξ и по λ, из (8) получим

$$v(x,t,\Phi)=\int\limits_D Q(x-\xi,t)\,\Phi(\xi)\,dD_\xi,\qquad(9)$$

где

$$Q(x,t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_S\lambda\exp(\lambda^2 t)\,P\left(x,\frac{\lambda}{a}\right)a^{-2}d\lambda.\qquad(10)$$

Подставляя выражение $P(x, \lambda/a)$ из (6) в (10) и интегрируя почленно, легко убедиться в том, что вычисление интеграла (10) сводится к вычислению следующих интегралов:

$$\int\limits_S\exp\left(\lambda^2 t-\frac{\lambda}{a}|x|\right)\lambda\,d\lambda=\frac{i\pi^{1/2}|x|}{2at^{3/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right),\qquad(11)$$

$$\int\limits_S\exp\left(\lambda^2 t-\frac{\lambda}{a}|x|\right)d\lambda=\frac{i\pi^{1/2}}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right),\qquad(12)$$

$$\int\limits_S\exp\left(\lambda^2 t-\frac{\lambda}{a}|x|\right)\frac{d\lambda}{\lambda}=-\frac{i\pi^{1/2}}{a\sqrt{t}}\int\limits_0^{|x|}\exp\left(-\frac{\rho^2}{4a^2t}\right)d\rho+\pi i.\qquad(13)$$

С учетом (11), (12), (13) и (10) получаем

$$Q(x,t)=\frac{1}{4\pi^{3/2}}\left\{\left[\left(\frac{1}{2a^3t^{3/2}}+\frac{1}{at^{1/2}|x|^2}\right)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a(t(1+\tau))^{1/2}|x|^2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t(1+\tau)}\right)-\frac{2}{|x|^3}\int\limits_{|x|/2a(t(1+\tau))^{1/2}}^{|x|/2at^{1/2}}\exp(-\rho^2)\,d\rho\right]E-$$

$$-\left[\left(\frac{1}{2a^3t^{3/2}}+\frac{3}{at^{1/2}|x|^2}\right)\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right)\left(\frac{1}{2a^3(t(1+\tau))^{3/2}}+\frac{1}{a(t(1+\tau))^{1/2}|x|^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2t(1+\tau)}\right)-\frac{6}{|x|^3}\int\limits_{|x|/2a(t(1+\tau))^{1/2}}^{|x|/2at^{1/2}}\exp(-\rho^2)\,d\rho\right]\frac{xx'}{|x|^2}\Bigg\}. \quad (14)$$

Остается теперь показать, что вектор-функция $v(x, t, \Phi)$, определяемая формулой (9), где $Q(x, t)$ имеет представление (14), удовлетворяет начальному условию (3). Для этой цели необходимо (9) представить в виду суммы интегралов

$$v(x,t,\Phi)=\sum_{k=1}^{9}J_k(x,t),$$

$$J_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_D\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right)\Phi(\xi)\,dD_\xi,$$

$$J_2(x,t)=\frac{1}{4a\pi^{3/2}t^{1/2}}\int\limits_D\frac{\Phi(\xi)}{|x-\xi|^2}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right)dD_\xi, \quad (15)$$

$$J_3(x,t)=\frac{-1}{4a\pi^{3/2}(t(1+\tau))^{1/2}}\int\limits_D\frac{\Phi(\xi)}{|x-\xi|^2}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t(1+\tau)}\right)dD_\xi,$$

$$J_4(x,t)=-\frac{1}{2\pi^{3/2}}\int\limits_D\frac{\Phi(\xi)}{|x-\xi|^3}\,dD_\xi\int\limits_{|x-\xi|/2a(t(1+\tau))^{1/2}}^{|x-\xi|/2at^{1/2}}\exp(-\rho^2)\,d\rho,$$

. . . .

Известным способом вычисляются пределы всех этих интегралов:

$$\lim_{t\to0}J_1(x,t)=\Phi(x),\quad \lim_{t\to0}J_2(x,t)=\Phi(x),\quad \lim_{t\to0}J_3(x,t)=-\Phi(x),$$

$$\lim_{t\to0}J_4(x,t)=0,\quad \lim_{t\to0}J_5(x,t)=-\Phi(x),\quad \lim_{t\to0}J_6(x,t)=-\Phi(x),$$

$$\lim_{t\to0}J_7(x,t)=\Phi(x);\quad \lim_{t\to0}J_8(x,t)=\Phi(x),\quad \lim_{t\to0}J_9(x,t)=0.$$

Подставляя эти выражения в (15), получим

$$v(x,0,\Phi)=\sum_{k=1}^{9}\lim_{t\to0}J_k(x,t)=\Phi(x),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, доказанную теорему 1 можно перефразировать так:

Теорема 2. *Если $\Phi(x)$ непрерывна и ограничена в некоторой области D трехмерного эвклидова пространства, то задача Коши* (2), (3) *для $f(x, t)\equiv 0$ имеет решение, представимое формулой* (9), *где матрица $Q(x, t)$ дается формулой* (14).

Известным приемом [1] может быть доказана также

Теорема 3. *Если $f(x, t)$ — непрерывная и ограниченная вектор-функция при $t\geqslant 0$ в некоторой области D трехмерного эвклидова пространства E^3, то задача Коши для системы* (2) *при начальном условии*

$$v(x,0)=\Phi(x)$$

имеет решение в области D, представимое формулой

$$v(x,t,f)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D Q(x-\xi,t-\tau)\,f(\xi,\tau)\,dD_\xi.$$

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
15 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М., 1948. [2] П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде, Нестационарные движения вязкопластических сред, М., 1970. [3] М. Л. Расулов, Уч. зап. Азерб. гос. унив., № 5 (1961). [4] М. Л. Расулов, Метод контурного интеграла, «Наука», 1964.