

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Г. Д. КАРАТОПРАКЛИШЕВ (Болгария)

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 15 VIII 1972)

Пусть G — ограниченная область m -мерного пространства E_m точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ с кусочно-гладкой $(m-1)$ -мерной границей Γ , разбиваемой плоскостью $x_m = 0$ на две области: $G_1 = G \cap \{x_m > 0\}$ и $G_2 = G \cap \{x_m < 0\}$, причем $G \cap \{x_m = 0\}$ — односвязная область на плоскости $x_m = 0$. Обозначим через Σ и S те части Γ , где $x_m \geq d$ и $x_m < d$ соответственно, а через Σ_1 ту часть Σ , где $d \leq x_m < 0$ ($\inf_{x \in G} x_m < d = \text{const} < 0$).

Рассмотрим в области G оператор

$$Lu = u_{x_1 x_1} + k(x_m) \sum_{i=2}^m u_{x_i x_i} + \alpha u_{x_m} + c(x) u,$$

где $k(x_m)$ — трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $\Delta = [h_1, h_2]$, $h_1 = \inf_{x \in G} x_m$, $h_2 = \sup_{x \in G} x_m$, функция, удовлетворяющая условиям: $k(x_m) > 0$ при $x_m > 0$, $k(x_m) < 0$ при $x_m < 0$, $k(0) = 0$ и $k'(x_m) > 0$ при $x_m \in \Delta$; α — постоянная; $c(x)$ — непрерывная в $\bar{G}$ функция.

Пусть $S_0 = G \cap \{x_m = d\}$. Будем предполагать, что $S = S_1 \cup S_2$, где S_1 — боковая поверхность, а S_2 — нижнее основание цилиндра $S_0 \times [d, h_1]$.

Требуется найти в области G решение уравнения

$$Lu = f(x), \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \quad (2)$$

Обозначим через C_L множество всех функций $u(x) \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$, первые частные производные u_{x_i} , $i = 1, \dots, m$, которых интегрируемы с квадратом на G и ее границе Γ , и удовлетворяющих условию (2). Пусть $u(x) \in C_L$ и $q(x_m) \in C^1(\Delta)$ — пока произвольная функция. Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_G q u_{x_m} Lu \, dx = & -\frac{1}{2} \int_G (qk)_{x_m} u^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_G \left\{ q' u_{x_1}^2 + (qk)' \sum_{i=2}^{m-1} u_{x_i}^2 + \right. \\ & + [2q\alpha - (qk)'] u_{x_m}^2 \Big\} dx + \frac{1}{2} \int_\Gamma q \left(-n_m u_{x_1}^2 - kn_m \sum_{i=2}^{m-1} u_{x_i}^2 + \right. \\ & \left. + kn_m u_{x_m}^2 + 2n_1 u_{x_1} u_{x_m} + 2k \sum_{i=2}^{m-1} n_i u_{x_i} u_{x_m} \right) ds = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = (n_1, \dots, n_m)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ .

Выбираем $q = \varepsilon x_m + \delta$ в Δ , где $\varepsilon > 0$ — фиксированная, а $\delta > 0$ — пока произвольная постоянная. Для J_2 получаем

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_G \left\{ \varepsilon u_{x_1}^2 + (\varepsilon k + qk') \sum_{i=2}^{m-1} u_{x_i}^2 + [q(2\alpha - k') - \varepsilon k] u_{x_m}^2 \right\} dx.$$

Пусть $\alpha > \sup_{x_m \in \Delta} k'(x_m) / 2$. Постоянная δ выбирается столь большая, что $q > 0$, $q(2\alpha - k') - \varepsilon k \geq \mu = \text{const} > 0$ и $\varepsilon k + qk' \geq \mu_1 = \text{const} > 0$ в Δ . Тогда

$$J_2 \geq C_1 \int_G \sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 dx,$$

где $C_1 = \min(\varepsilon, \mu, \mu_1)$. Так как $u = 0$ на Γ , то $u_{x_i} = N(x)n_i$, $i = 1, \dots, m$, и, следовательно,

$$J_3 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} N^2 q n_m \left(n_1^2 + k \sum_{i=2}^m n_i^2 \right) ds - \frac{1}{2} \int_{S_2} N^2 q k ds.$$

Если

$$n_m \geq 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad n_1^2 + k(x_m) \sum_{i=2}^m n_i^2 > 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_1, \quad (4)$$

то $J_3 \geq 0$. Если $(qc)_{x_m} \leq 0$ в $\bar{G}$, то $J_1 \geq 0$. Из (3) следует, что $u = 0$, если $Lu = 0$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. Если $\alpha > \sup_{x_m \in \Delta} k'(x_m) / 2$, Σ и Σ_1 удовлетворяют условиям

(4) и функция $c(x)$ удовлетворяет условию $(qc)_{x_m} \leq 0$ в $\bar{G}$, то задача (1), (2) имеет не более одного решения $u \in C_1$.

Обозначим через L^+ оператор, сопряженный к L :

$$L^+u = u_{x_1 x_1} + k(x_m) \sum_{i=2}^m u_{x_i x_i} + \alpha^+ u_{x_m} + c^+ u,$$

где $\alpha^+ = 2k' - \alpha$, $c^+ = k'' + c$.

Пусть $\dot{C}^2(\bar{G}, \Gamma)$ — множество всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{G}$ функций, удовлетворяющих условию (2), а $W_2^2(\partial p)$ — замыкание этого множества в норме $W_2^2(G)$. Легко видеть, что граничное условие, сопряженное к (2), имеет вид $v = 0$ на Γ (в работе используется терминология, принятая в (1)). Пусть $f \in L_2(G)$.

Функция $u \in L_2(G)$ называется слабым решением задачи (1), (2), если

$$(u, L^+v)_0 = (f, v)_0$$

для любого $v \in W_2^2(\partial p)$ ($(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(G)$).

Пусть $v \in \dot{C}^2(\bar{G}, \Gamma)$ и $q(x_m) = \varepsilon x_m + \delta_1$ в Δ , где $\varepsilon > 0$ — фиксированная, а $\delta_1 > 0$ — пока произвольная постоянная. Как и выше, получаем

$$\begin{aligned} \int_G q v_{x_m} L^+ v dx &= -\frac{1}{2} \int_G [q(k'' + c)]_{x_m} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_G \{ \varepsilon v_{x_1}^2 + \\ &+ (\varepsilon k + qk') \sum_{i=2}^{m-1} v_{x_i}^2 + [2q(\frac{3}{2} k' - \alpha) - \varepsilon k] v_{x_m}^2 \} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} N^2 q n_m \left(n_1^2 + k \sum_{i=2}^m n_i^2 \right) ds - \frac{1}{2} \int_{S_2} N^2 q k ds = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $\alpha < \inf_{x_m \in \Delta} 3k' / 2$. Постоянная δ_1 выбирается столь большая, что $q > 0$, $2q(3/2 k' - \alpha) - \varepsilon k \geq \nu = \text{const} > 0$ и $\varepsilon k + qk' \geq \nu_1 = \text{const} > 0$ в Δ .

Тогда

$$J_2 \geq C_1 \int_G \sum_{i=1}^m v_{x_i}^2 dx,$$

где $C_1 = \min(\varepsilon, \nu, \nu_1)$. Если Σ и Σ_1 удовлетворяют условиям (4), то $J_3 + J_4 > 0$. Если $[q(k'' + c)]_{x_m} \leq 0$ в $\bar{G}$, то $J_1 \geq 0$. Так как $v = 0$ на Γ , то

$$\int_G \sum_{i=1}^m v_{x_i}^2 dx \geq C_2 \int_G \left(v^2 + \sum_{i=1}^m v_{x_i}^2 \right) dx.$$

Из (5), применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$C_4 \|v\|_1 \|L^+v\|_0 \geq \int_G qv_{x_m} L^+v dx \geq C_3 \|v\|_1^2,$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве $W_2^1(G)$. Отсюда получаем энергетическое неравенство

$$\|L^+v\|_0 \geq C \|v\|_1, \quad C > 0, \quad v \in C^2(\bar{G}, \Gamma). \quad (6)$$

Путем пополнения убеждаемся в справедливости (6) для $v \in W_2^2(\partial p)$. Из неравенства (6), как известно (1), следует существование слабого решения задачи (1), (2) при любом $f \in W_2^{-1}(G)$. Итак, имеет место следующая

Теорема 2. Если $\alpha < \inf_{x_m \in \Delta} 3k'/2$, Σ и Σ_1 удовлетворяют условиям (4) и функции $k(x_m)$, $c(x)$ удовлетворяют условию $[q(k'' + c)]_{x_m} \leq 0$ в $\bar{G}$, то существует слабое решение задачи (1), (2) при любом $f \in W_2^{-1}(G)$.

Аналогично выводится энергетическое неравенство

$$\|Lu\|_0 \geq C \|u\|_1, \quad C > 0, \quad u \in W_2^2(\partial p), \quad (7)$$

если $\alpha > \sup_{x_m \in \Delta} k'/2$, $(qc)_{x_m} \leq 0$ в $\bar{G}$ и выполняются условия (4). Из (7) следует единственность гладкого решения $u \in W_2^2(\partial p)$ задачи (1), (2).

Если $\sup_{x_m \in \Delta} k'/2 < \alpha < \inf_{x_m \in \Delta} 3k'/2$ и выполняются остальные условия теорем 1 и 2, то справедливы оба энергетических неравенства (6) и (7). В этом случае задача (1), (2) почти корректна (1).

Математический институт с вычислительным центром
Болгарской Академии наук
София

Поступило
15 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.