

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

В. Н. СТРАХОВ

ОБ АЛГОРИТМАХ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВНО-КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 24 III 1972)

1. Пусть X — банахово пространство, T — действующий в X замкнутый неограниченный линейный оператор, $\overline{D(T)} = X$. Задача нахождения элементов $\varphi = Tf$ по элементам $f \in D(T)$ поставлена некорректно (отсутствует непрерывная зависимость φ от f). Однако при выполнении дополнительных ограничений задача может быть превращена в корректную. Подобные задачи получили название условно-корректных (¹, ²). В настоящей заметке рассматривается следующая условно-корректная задача: требуется найти элемент $\varphi = Tf$ по элементу $f_\delta = f + \delta f$, где

$$f \in \mu_N, \quad \delta f \in X, \quad \|\delta f\| \leq \delta, \quad \mu_N = \{f; \|Uf\| \leq N\}, \quad (1)$$

N и δ — известные числа, U — действующий в X замкнутый неограниченный линейный оператор, $D(U) \subset D(T)$, $\overline{D(U)} = X$, $B = U^{-1}$ существует (ограниченный или неограниченный), $\overline{D(B)} = X$. Предполагается, что μ_N является множеством равномерной регуляризации для задачи нахождения значений оператора T .

2. Приведем основные понятия теории линейных условно корректных задач. Всюду ниже предполагается, что α — параметр, a — множество его значений, α_0 — предельная точка в a .

Определение 1 (³). Пусть $m \subset X$, $\bar{m} = X$. Семейство действующих в X линейных операторов S_α называется фильтрующим в m , если:
1°) $S_\alpha \theta \in m \quad \forall \alpha \in a, \alpha \neq \alpha_0, \quad \forall \theta \in X$; 2°) $\|\theta - S_\alpha \theta\| \rightarrow 0 \quad \forall \theta \in X; \quad \alpha \rightarrow \alpha_0$
3°) $\sup_{\alpha \in a} \|S_\alpha\| = K < +\infty$.

Определение 2 (⁴, ³). Семейство V_α действующих в X линейных операторов называется регуляризующим для задачи нахождения значений оператора T , если: 1°) $\|V_\alpha\| < +\infty \quad \forall \alpha \in a, \alpha \neq \alpha_0$; 2°) $\|Tf - V_\alpha f\| \rightarrow 0 \quad \forall f \in D(T), \quad \alpha \rightarrow \alpha_0$.

Определение 3 (³). Если для всех α операторы регуляризующего семейства V_α имеют представление $V_\alpha = TS_\alpha$, где S_α — фильтрующее в $D(T)$ семейство, то семейство V_α называется нормальным.

Определение 4 (⁵, ³). Если на множестве $M \subset D(T)$ $\mu(\alpha) = \sup_{f \in M} \|Tf - V_\alpha f\| < +\infty, \quad \mu(\alpha) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \alpha_0$, то M называется множеством равномерной регуляризации для V_α .

Определение 4 (⁵, ³). Если на множестве $M \subset D(T)$ $\mu(\alpha) = \sup_{f \in M} \|f - S_\alpha f\| < +\infty, \quad \eta(\alpha) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \alpha_0$, то M называется множеством равномерной фильтрации для S_α .

Предложение 1. Для того чтобы μ_N из (1) было множеством равномерной регуляризации для семейства V_α , необходимо и достаточно, чтобы было: 1°) $\gamma(\alpha) = \|(T - V_\alpha)B\| < +\infty \quad \forall \alpha \in a; \quad 2^\circ) \quad \gamma(\alpha) \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \alpha_0$.

Предложение 2. Для того чтобы μ_N из (1) было множеством равномерной фильтрации для семейства S_α , необходимо и достаточно, чтобы было: 1°) $\chi(\alpha) = \|(E - S_\alpha)B\| < +\infty \quad \forall \alpha \in a$; 2°) $\chi(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_0} 0$

Определение 6. Совокупность семейств V_α , для которых μ_N является множеством равномерной регуляризации, обозначается $V(T; \mu_N)$. Совокупность семейств S_α , для которых μ_N является множеством равномерной фильтрации, обозначается $S(U; \mu_N)$.

Определение 7 (⁶, ⁸, ⁷). Величина

$$\omega(\delta, N; U) = \inf_{R \in L(X, X)} \sup_{f_\delta \in M_\delta} \|Tf - Rf_\delta\|, \quad (2)$$

где $L(X, X)$ — пространство действующих из X в X ограниченных линейных операторов, $M_\delta = \{f_\delta = f + \delta f, f \in \mu_N, \|\delta f\| \leq \delta\}$, называется наилучшим приближением элементов $\Phi = Tf$ на M_δ с помощью ограниченных линейных операторов.

Аналогичный смысл имеет величина (⁶)

$$\tilde{\omega}(\delta, N; U) = \inf_{R \in L(X, X)} \sup_{f_\delta \in \tilde{M}_\delta} \|Tf - Rf_\delta\|, \quad (3)$$

где $\tilde{M}_\delta = \{f_\delta = f + \delta f, f \in \mu_N, \delta f \in \mu_N, \|\delta f\| \leq \delta\}$.

Определение 8. Если для семейства V_α , $\alpha \in a$, регулирующего задачу нахождения значений оператора T , существует зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ такая, что для всех $\delta \leq \delta_0$

$$\sup_{f_\delta \in M_\delta} \|Tf - V_{\alpha(\delta)}f_\delta\| \leq C\omega(\delta, N; U), \quad (4)$$

где C может зависеть от N , но не от δ , то приближенные решения $\Phi_\delta = V_{\alpha(\delta)}f_\delta$ называются оптимальными по порядку на μ_N .

3. Теорема 1. Пусть $V_\alpha \in V(T; \mu_N)$ и пусть

$$C_\delta(\alpha) = \|(T - V_\alpha)B\|N + \|V_\alpha\|\delta, \quad \alpha \in a. \quad (5)$$

Тогда имеет место неравенство

$$1/2 C_\delta(\alpha) \leq \sup_{f_\delta \in M_\delta} \|Tf - V_\alpha f_\delta\| \leq C_\delta(\alpha). \quad (6)$$

Следствие 1. Если зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ определяется из условия

$$C_\delta(\alpha) = \inf_\alpha, \quad (7)$$

то соответствующие решения $\Phi_\delta = V_\alpha f_\delta$ имеют предельный порядок убывания погрешности при $\delta \rightarrow 0$ (для данного семейства).

Следствие 2. Либо зависимость (7) обеспечивает оптимальность по порядку приближенных решений на μ_N , либо не существует ни одной зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающей оптимальность по порядку приближенных решений на μ_N .

4. Пусть нормальные регуляризующие семейства $V_\alpha = TS_\alpha \in V(T; \mu_N)$ обладают следующими свойствами: 1°) $S_\alpha \in S(U; \mu_N)$; 2°) $\|US_\alpha\| < +\infty \quad \forall \alpha \in a$, $\alpha \neq \alpha_0$; 3°) $US_\alpha = S_\alpha U \quad \forall \alpha \in a$. Всюду ниже предполагается, что V_α обладает этими свойствами.

Предложение 3. Семейство $W_\alpha = US_\alpha$ регуляризует задачу нахождения значений оператора U .

Теорема 2. Пусть

$$\delta_\alpha = \sup_{f_\delta \in M_\delta} \|f - S_\alpha f_\delta\|, \quad N_\alpha = \sup_{f_\delta \in M_\delta} \|U(f - S_\alpha f_\delta)\|. \quad (8)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\omega(\delta, N; U) \leq \sup_{f_\delta \in M_\delta} \|Tf - V_\alpha f_\delta\| \leq \tilde{\omega}(\delta_\alpha, N_\alpha; U) \leq \omega(\delta_\alpha, N_\alpha; U). \quad (9)$$

З а м е ч а н и е. Неравенство (9) остается в силе, если δ_α и N_α заменить произвольными оценками δ_α^* , N_α^* сверху; например, можно принять

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^* &= \|(E - S_\alpha)B\|N + \|S_\alpha\|\delta, \\ N_\alpha^* &= \|(E - S_\alpha)\|N + \|W_\alpha\|\delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Т е о р е м а 3. Если

$$\sup_{\alpha \in \alpha} \|(E - S_\alpha)B\| \|W_\alpha\| = K < +\infty, \quad (11)$$

то всегда можно выбрать зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ таким образом, чтобы приближенные решения $\varphi_\delta = V_{\alpha(\delta)} f_\delta$ были оптимальными по порядку на M_N . В частности, эти зависимости можно задавать условиями

$$|\|(E - S_\alpha)B\| - \delta/N| = \min, \quad |\|W_\alpha\| - N/\delta| = \min. \quad (12)$$

5. Нетрудно получить аналог теоремы 2 для погрешностей в точках из M_δ .

Т е о р е м а 4. Пусть для данных $f \in M$, $f_\delta \in M_\delta$

$$\delta_\alpha(f, f_\delta) = \|f - S_\alpha f_\delta\|, \quad N_\alpha(f, f_\delta) = \|U(f - S_\alpha f_\delta)\|. \quad (13)$$

Тогда

$$\|Tf - V_\alpha f_\delta\| \leq \tilde{\omega}(\delta_\alpha(f, f_\delta), N_\alpha(f, f_\delta); U) \leq \omega(\delta_\alpha(f, f_\delta), N_\alpha(f, f_\delta); U). \quad (14)$$

З а м е ч а н и е. Неравенство (14) остается в силе, если $\delta_\alpha(f, f_\delta)$, $N_\alpha(f, f_\delta)$ заменить произвольными оценками $\delta_\alpha^*(f, f_\delta)$, $N_\alpha^*(f, f_\delta)$ сверху. В частности, можно принять

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^*(f, f_\delta) &= \|\delta f\| + \|f_\delta - S_\alpha f_\delta\|, \\ N_\alpha^*(f, f_\delta) &= \|(E - S_\alpha)Uf\| + \|W_\alpha \delta f\|. \end{aligned} \quad (15)$$

Как известно (⁸⁻¹⁰), «принцип невязки» построения приближенных решений некорректных задач состоит в том, чтобы находить эти решения по соотношению $\varphi_\delta = V_\alpha f_\delta$, где $\alpha = \alpha(\delta)$ найдено из условия

$$|\|f_\delta - S_\alpha f_\delta\| - \delta| = \min. \quad (16)$$

Т е о р е м а 5. Если параметр α выбран по принципу невязки, то

$$\|\varphi - \varphi_\delta\| \leq \tilde{\omega}(2\delta + \varepsilon(\delta), N_\alpha^*; U) \leq \omega(2\delta + \varepsilon(\delta), N_\alpha^*; U), \quad (17)$$

где $\varepsilon(\delta)/\delta = O(1)$ при $\delta \rightarrow 0$, а N_α^* определено по (15).

С л е д с т в и е. Если зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ (16) такова, что при $\delta \rightarrow 0$ элементы $\theta_\delta = W_{\alpha(\delta)} f_\delta$ сходятся (по норме) к элементам $\theta = Uf$, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(2\delta + \varepsilon(\delta), N_\alpha^*; U) = O(\omega(\delta, \|Uf\|; U)). \quad (18)$$

Иначе говоря, при малых δ приближенные решения φ_δ будут оптимальными по порядку.

Теоремой 5 и следствием из нее существенно усиливаются результаты В. А. Морозова (⁷), относящиеся к методу регуляризующего функционала А. Н. Тихонова для случая гильбертова пространства.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Г. Крейн, ДАН, 114, № 6 (1957). ² В. Н. Страхов, ДАН, 196, № 4 (1971). ³ В. Н. Страхов, Физика Земли, № 8 (1969). ⁴ А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3 (1963). ⁵ В. Р. Иванов, Сиб. матем. журн., 7, № 3 (1966). ⁶ В. Н. Страхов, Дифференциальные уравнения, 6, № 8 (1970). ⁷ В. А. Морозов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 4 (1971). ⁸ D. L. Phillips, Assoc. Comp. Machinery, 9, № 1 (1962). ⁹ В. Р. Иванов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 6 (1966). ¹⁰ В. А. Морозов, там же, 8, № 2 (1968).