Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 5

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. Л. ТИМОХОВИЧ

О ПРОСТРАНСТВАХ С ω-СИСТЕМАМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 III 1972)

А. В. Архангельский в работе ([1]) определил ω-систему (см. ниже) и доказал, что в классе вполне регулярных пространств наличие ω-системы эквивалентно полноте в смысле Чеха. Хаусдорфовы и регулярные пространства с ω-системой были исследованы в работах ([2], [3]). Предлагаемая заметка посвящена дальнейшему изучению этих пространств. Все пространства, если это не оговорено особо, предполагаются хаусдорфовыми. Пространства, обладающие ω-системой, будем для краткости называть полными.

Определение 1. Скажем, что конец ξ над пространством X (т. е. максимальная центрированная система открытых в X множеств) мелкий относительно семейства покрытий $\{\lambda_n\}$, если найдутся последовательности $\{n_k\}$ и $\{U_k\}$, где $n_{k+1} > n_k$ и $U_k \in \xi$, такие, что $U_k \subset V \in \lambda_{n_k}$ для каждого k. Семейство покрытий $\{\lambda_n\}$ пространства X назовем ω-системой, если любой конец ξ, мелкий относительно $\{\lambda_n\}$, сходится к некоторой точке $x \in X$.

Обозначим $\sigma X = X \cup \{\xi \mid \xi$ — свободный конец над $X\}$, $\mathcal{T}X$ — топология пространства X, ${}^*O = O \cup \{\xi \in \sigma X \setminus X \mid \xi \ni O\}$, $O \in \mathcal{T}X$, $\mathcal{T}_1\sigma X = \{{}^*O \mid O \in \mathcal{T}X\}$. Семейство $\mathcal{T}_1\sigma X$ объявим базой пространства σX. Ивестно, что σX — максимальное H-замкнутое расширение в смысле θ-непрерывных отображений (см., например, ([4], [5])).

Если δX — H-замкнутое расширение пространства X, то существует единственное θ-непрерывное бикомпактное отображение $j_{\delta X}\colon \sigma X \to \delta X$, обладающее свойствами: $j_{\delta X}|X = \mathrm{id}$ (тождественное); $j^{-1}_{\delta X}(\tilde{O})^*O$; $j_{\delta X}([O]_{\sigma X}) = [O]_{\delta X}$, где $O \in \mathcal{T}X$, $\tilde{O} = \delta X \setminus [X \setminus O]_{\delta X}$ (см. ([5])).

Обозначим далее θX и $\dot{X}$ гиперабсолют и абсолют соответственно пространства X, $\pi_X(\xi) = \bigcap\limits_{O \in \xi}[O]_X\colon \dot{X} \to X$. (Здесь мы пользуемся конструкцией абсолюта, привлекающей концы над X ([6]), т. е. $\dot{X}$ — множество всех концов, сходящихся к точкам $x \in X$, θX — пространство всех вообще концов с базой $\mathcal{T}_1\theta X = \{O^* \mid O \in \mathcal{T}X\}$, где $O^* = \{\xi \in \theta X \mid \xi \ni O\}$. Подробнее об абсолюте см. ([5-8])). Нам понадобятся следующие известные факты: если δX — H-замкнутое расширение, то $\theta X = \theta\delta X$; отображение π_X θ-непрерывно, совершенно и неприводимо; $\pi_X^{\#}(O^* \cap \dot{X}) = \mathrm{Int}_X[O]_X$*; $\pi_X[O^* \cap \dot{X}) = [O]_X$.

Рассмотрение полных пространств начнем со следующего определения.

Определение 2. H-замкнутое расширение δX регулярного пространства X назовем R-расширением, если каждая точка $x \in X$ регулярна в δX.

Теорема 1. *Следующие условия для H-замкнутого расширения δX регулярного пространства X эквивалентны: 1) δX — R-расширение;* 2) $j_{\delta X}$ непрерывно в каждой точке $x \in X$; 3) $\pi_{\delta X}$ непрерывно в каждой точке $x \in \dot{X}$.

Лемма 1. *Если $X \in \mathcal{T}Y$, Y регулярно, δY — R-расширение для Y*, то $[X]_{\delta Y}$ — *R-расширение для X.*

---

* Если $f\colon X \to Y$, то $f^{\#}(A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$.

Лемма 2. *Если δX_α — R-расширение X_α, то $\prod\limits_{(\alpha)} \delta X_\alpha$ — R-расширение $\prod\limits_{(\alpha)} X_\alpha$.*

Необходимо отметить, что σX — R-расширение тогда и только тогда, когда X регулярно. Отметим также, что R-расширения внешне схожи с ПО-расширениями (бикомпактное расширение δX — ПО-расширение, если любые две точки $x \in X$ и $y \in \delta X \setminus X$ отделимы в δX; подробнее см. в ([9])).

Теорема 2. *Следующие условия для регулярного пространства X эквивалентны:* 1) *X полное;* 2) *$X - G_\delta$ в любом (достаточно в одном) R-расширении;* 3) *$X - G_\delta$ в любом (достаточно в одном) ПО-расширении.*

Доказательство почти то же, что и для теоремы 1 работы ([2]).

Вследствие теоремы 2 и леммы 2 справедлива

Теорема 3. *Произведение счетного числа регулярных полных пространств — полное пространство.*

Известно, что уолменовское расширение регулярного пространства принадлежит классу ПО-расширений этого пространства ([9]). В силу этого факта, а также теоремы 3 работы ([2]) имеет место

Теорема 4. *Регулярные полные пространства наследственны по множествам типа G_δ.*

Следуя А. В. Архангельскому, назовем симметрику ρ на пространстве X полной, если любая фундаментальная последовательность (последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся n и $y \in X$ такие, что $x_k \in O(y, \varepsilon)$, как только $k \geqslant n$) в X сходится. Предположим, что симметрика ρ на регулярном пространстве X полная и сильная (т. е. $\mathrm{Int}_X O(x, \varepsilon) \ni x$ для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$). Исходя из системы $\{\varphi_n\}$, где $\varphi_n = \{O(x, 1/n) \mid x \in X\}$, нетрудно построить семейство покрытий $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющее условиям: для любых $U \in \lambda_n$ и n найдется $x \in X$ такая, что $[U]_X \subset \mathrm{int}_X O(x, 1/n)$; λ_{n+1} вписано в λ_n. Тогда, если ξ — конец над X, мелкий относительно $\{\lambda_n\}$, то $\cap \{[O]_X \mid O \in \xi\} \neq \phi$. Итак, доказана

Теорема 5. *Регулярное пространство, симметризуемое сильной полной симметрикой, полное.*

Для вполне регулярных пространств эта теорема была доказана А. В. Архангельским ([10]).

Известны следующие факты: симметризуемый перистый паракомпакт метризуем ([10]); если X — паракомпакт, Y регулярно и перисто и $Y \supset X$, то существует перистый паракомпакт X', $X \subset X' \subset Y$ ([9]).

Из этих утверждений, теоремы 5 и одной теоремы работы ([9]) следует

Теорема 6. *Паракомпакт, лежащий в пространстве с сильной полной симметрикой, метризуем.*

В работе ([2]) обобщается на регулярные пространства известная теорема Б. А. Пасынкова об открытых паракомпактных образах полных в смысле Чеха пространств ([11]). Возможно дальнейшее обобщение теоремы Б. А. Пасынкова на хаусдорфовы пространства, а именно:

Теорема 7. *Паракомпакт, являющийся непрерывным открытым образом полного пространства, полон в смысле Чеха.*

Доказательство. Пусть отображение f: $X \to Y$ непрерывно и открыто, X полно, Y — паракомпакт. Концу $\xi \in \theta X$ поставим в соответствие конец $F(\xi) = \{f(U) \mid U \in \xi\} \in \theta Y$. Отображение F: $\theta X \to \theta Y$ открыто и непрерывно, $F(\dot{X}) = \dot{Y}$, $F(O^*) = (f(O))^*$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \dot{X} \arrow[r, "F \mid \dot{X}"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \dot{Y} \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна (подробнее об отображении F см. в [3]). Обозначим $F|\dot{X} = \tilde{f}$, $F^{-1}(\dot{Y}) = \alpha\dot{X}$, $F|\alpha X = \bar{f}$. Отображение $\bar{f}$: $\alpha\dot{X} \to \dot{Y}$ открыто и совершенно. Так как полнота X, эквивалентная полноте в смысле Чеха, абсолютна $\dot{X}$ [2], можно считать, что $\dot{X} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n \in \mathcal{T}\alpha\dot{X}$. Для каждой точки $y \in Y$ выберем точку $x_y \in f^{-1}(y)$ и зафиксируем бикомпакт $\tilde{x}_y = \pi_X{}^{-1}(x_y)$. Далее найдем окрестность O_{x_y} точки x_y такую, что $(\overset{*}{O}_{x_y} \cap \dot{X})_{\alpha\dot{X}} = \overset{*}{O}_{x_y} \cap \alpha\dot{X} \subset U_1$. В силу равенства $\pi_{\dot{X}}^{\#}(O^* \cap \dot{X}) = \mathrm{Int}_X[O]_X$ справедливо включение $\overset{*}{O}_{x_y} \supset \tilde{x}_y$, поэтому семейство $\{f(\pi_{\dot{x}_y}^{\#} \cap \dot{X}))\,|\,y \in Y\}$ — покрытие Y. Впишем в него локально конечное покрытие $\{V_\alpha\}$. Каждому V_α поставим в соответствие некоторое множество $f(\pi_{\dot{X}}^{\#}(\overset{*}{O}_{x_y} \cap \dot{X})) \supset V_\alpha$ и возьмем пересечение $\tilde{f}^{-1}(\pi_Y{}^{-1}(V_\alpha)) \cap (\overset{*}{O}_{x_y} \cap \dot{X})$. Обозначим это пересечение Γ_α.

Легко видеть, что семейство $\{\Gamma_\alpha\}$ открытых в $\dot{X}$ множеств локально конечно в αX. Кроме того, $f(\pi_{\dot{X}}^{\#}(\Gamma_\alpha)) = V_\alpha$ и, как следствие локальной конечности, $[\bigcup\limits_{(\alpha)} \Gamma_\alpha]_{\alpha\dot{X}} = \bigcup\limits_{(\alpha)} [\Gamma_\alpha]_{\alpha\dot{X}} \subset U_1$. Множество $[\bigcup\limits_{(\alpha)} \Gamma_\alpha]_{\alpha\dot{X}}$ можно представить в виде $W_1{}^* \cap \alpha\dot{X}$, где $W_1 \in \mathcal{T}X$ (см. [5]). Итак, имеем $W_1{}^* \cap \alpha\dot{X} \subset U_1$; $\pi_{\dot{X}}^{\#}(W_1{}^* \cap \dot{X})$ открыто в X и $f|\pi_{\dot{X}}^{\#}(W_1{}^* \cap \dot{X})$ — открытое отображение; $f(\pi_{\dot{X}}^{\#}(W_1{}^* \cap \dot{X})) = Y$. Пусть построены множества $W_2, \ldots, W_n$ и для каждого $i = 1, \ldots, n$ выполнены условия: 1°) $W_i{}^* \supset \overset{*}{W}_{i+1}$; 2°) $W_i{}^* \cap \alpha\dot{X} \subset U_i$; 3°) $f(\pi_{\dot{X}}^{\#}(W_i{}^* \cap \dot{X})) = Y$. Обозначим $f_n = f|\pi_{\dot{X}}^{\#}(W_n{}^* \cap \dot{X})$. Для каждой $y \in Y$ зафиксируем $x_y \in f_n^{-1}(y)$ и окрестность O_{x_y} точки x_y так, чтобы $\overset{*}{O}_{x_y} \cap \alpha\dot{X} \subset U_{n+1}$, $\overset{*}{O}_{x_y} \subset W_n{}^*$. Далее, проведя те же рассуждения, что и в начале, получим множество W_{n+1}, удовлетворяющее условиям 1°) — 3°). По индукции продолжим построение множеств W_n для всех натуральных n. Обозначим $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (W_n{}^* \cap \alpha\dot{X})$. Множество Φ замкнуто и G_δ в $\dot{X}$ и, следовательно, полно в смысле Чеха. С другой стороны, Φ замкнуто в $\alpha\dot{X}$, $\pi_Y \circ \bar{f}|\Phi$ — совершенное отображение и $\pi_Y(\bar{f}(\Phi)) = Y$. Таким образом, Y полно в смысле Чеха. Теорема доказана.

Пользуюсь случаем поблагодарить В. И. Пономарева за ряд ценных советов.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
15 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, Вестн. Моск. унив., сер. матем., мех., № 2 (1961). [2] В. Л. Тимохович, там же, № 1 (1972). [3] В. Л. Тимохович, Весцi АН БССР, сер. фiз. мат. навук, № 4 (1972). [4] С. В. Фомин, Ann. math., 44 (1943). [5] С. Д. Илиадис, С. В. Фомин, УМН, 21, № 4 (1966). [6] С. Д. Илиадис, ДАН, 149, № 1 (1963). [7] В. И. Пономарев, ДАН, 149, № 1 (1963). [8] В. И. Пономарев, Матем. сборн., 60, № 1 (1963). [9] В. Л. Тимохович, Весцi АН БССР, сер. фiз. мат. навук, № 5 (1972). [10] А. В. Архангельский, ДАН, 164, № 2 (1965). [11] Б. А. Пасынков, ДАН, 175, № 2 (1967).