

УДК 519.95

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ю. П. ЛЕОНОВ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, НАБЛЮДАЕМЫХ В ОПЫТАХ

(Представлено академиком Б. П. Петровым 20 IV 1972)

Рассматриваются функции $x(t)$, $u(t)$ из $L_2(0, T)$, являющиеся некоторыми сигналами, наблюдаемыми в опыте.

Определение. Функции $x(t)$ и $u(t)$ задают линейную динамическую систему, если выполняются следующие условия:

1) Для заданной функции (входного сигнала) $x(t)$ существует функция $y^* \in L_2(0, T)$ (сигнал на выходе), близкая к $u(t)$ и определяемая соотношением

$$y^* = L\omega^*, \quad (1)$$

где L — линейный интегральный оператор вида

$$L\omega^* = \begin{cases} \int_0^t x(t-\tau)\omega^*(\tau)d\tau, & 0 \leq t \leq T_1, \\ \int_0^{T_1} x(t-\tau)\omega^*(\tau)d\tau, & t > T_1, \end{cases} \quad (2)$$

$\omega^*(t)$ — весовая функция, характеризующая динамическую систему, T_1 — память системы.

2) Для заданного класса входных сигналов X_1 определен соответствующий класс функций Y_1 на выходе системы

$$y_1^* = L_1\omega^*, \quad L_1 \in \{L_1\}, \quad (3)$$

где $\{L_1\}$ — класс линейных операторов, для которых выполняется условие

$$\|\Delta y_1\| \leq \|\Delta y\|, \quad L_1 \in \{L_1\}, \quad (4)$$

где

$$\Delta y_1 = y_1^* - y_1 = L_1\Delta\omega, \quad \Delta y = y^* - y = L\Delta\omega,$$

$$\Delta\omega = \omega^* - \omega, \quad y = L\omega, \quad y_1 = L_1\omega.$$

В (4) y и y_1 являются сигналами на выходе «истинной» системы с весовой функцией $\omega(\cdot)$.

На основании (4) неравенство (3) можно записать в эквивалентном виде

$$\|\Delta\omega\|_B \leq \|\Delta\omega\|_A, \quad \Delta\omega \in H/\bar{S}. \quad (5)$$

В (5) используется изометрия пространства $L_2(0, T)$ выходных сигналов и энергетического фактор-пространства $H/\bar{S}$ весовых функций ⁽¹⁾. Условие изометрии на основании (4) дают

$$\|\Delta y_1\|^2 = (L_1^* L_1 \Delta\omega, \Delta\omega) = \|\Delta\omega\|_B^2.$$

Существенно, что (4) и (5) должны выполняться для любой функции $\Delta\omega$.

Относительно модели имеет место

Теорема. Пусть заданы сигналы $x(t)$ и $u(t) \in L_2(0, T)$.

Тогда определена (в указанном смысле) динамическая система. Сигналы $x_1 \in X_1$, для которых выполняется условие (4), имеют вид

$$x_1 = R_1 x, \quad (6)$$

где R_1 — самосопряженный неотрицательный оператор (см. ниже), действующий в $L_2(0, T)$. Модель устойчива к малым вариациям наблюдаемых сигналов x и u .

Доказательство. Определим ω^* в (1) из условия минимума расстояния (1)

$$\varepsilon^2 = \|L\omega^* - u\|^2. \quad (7a)$$

Тогда функция y^* (1) представима в виде

$$y^* = Pu, \quad (7b)$$

где $P(\mathcal{P})$ — проектор, действующий в $L_2(0, T)$ со значениями в подпространстве проекций $\mathcal{P}$. По свойству проекций, функция y^* близка к u в смысле $\varepsilon^2 = \min$.

Определим далее оператор R_1 , действующий из $L_2(0, T)$ в $L_2(0, T)$, формулой

$$R_1 = \sum_k \gamma_k P_k, \quad (8)$$

где P_k — проектор ранга единица, действующий в $L_2(0, T)$ и соответствующий k -ой собственной функции оператора LL^* . Коэффициенты γ_k подчинены условиям $0 \leq \gamma_k \leq 1$.

Положим теперь

$$L_1 = R_1 L. \quad (9)$$

На основании (1), (3), (4), (8), (9) имеем

$$\Delta y_1 = R_1 \Delta u, \quad (10)$$

где $\Delta u = u - y$.

Из (10) и условий на γ_k непосредственно следует неравенство (4), которое выполняется для любой ошибки $\Delta u \in L_2(0, T)$. Вследствие изометрии пространств сигналов $L_2(0, T)$ и пространства весовых функций $H/\bar{S}$ неравенство (4) влечет (5) для любых ошибок и для любых $\Delta \omega \in H/\bar{S}$.

На основании (3), (9) полагая $\omega^* = \delta$, где δ -функция является элементом $H/\bar{S}$, можно получить из (3)

$$x_1 = L_1 \delta = R_1 x. \quad x = L \delta.$$

В последнем равенстве использовано интегральное свойство δ -функции

Класс сигналов X_1 , очевидно, включает сигнал $x(t)$, которому соответствует проектор $R_1 = P = \sum_k P_k$ в (8). В частности, из (8) следует, что сигнал $x_1(t)$ представлен в виде

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k \theta_k(t),$$

где $e_k = (x, \theta_k)$ и $\theta_k(t)$ — собственные функции оператора LL^* , действующего в $L_2(0, T)$. Последнее означает, что спектр сигнала $x_1(t)$, не «богаче» спектра сигнала $x(t)$. В частности, легко заметить, что любой сигнал вида

$$x_1(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$

где произвольная функция $g(\cdot)$ такова, что интеграл определен, удовлетворяет этому требованию.

Из (10) следует неравенство

$$\|\Delta y_1\| \leq \|\Delta u\|. \quad (11)$$

Следовательно, малые вариации сигнала u вызывают малые вариации выходных сигналов Δy .

Остается показать, что модель устойчива относительно малых вариаций входного сигнала $x(t)$. Малым вариациям сигнала $x(t)$, согласно (1), соответствуют малые вариации оператора L . Следовательно, на основании (1) можно записать для приращения y^*

$$\overline{\Delta y}^* = \overline{\Delta L} \omega^*$$

и для нормы

$$\|\overline{\Delta y}^*\|^2 = \|\overline{\Delta L} \omega^*\|^2.$$

В силу непрерывности нормы, из последнего соотношения следует, что малым вариациям $\overline{\Delta L}$ соответствуют малые вариации сигнала Δy .

Доказанная теорема имеет простую физическую интерпретацию. Допустим, что динамическая система является измерительным прибором, предназначенным для измерения сигналов X_1 . При этом на ее выходе появляются сигналы Y_1 , которые из-за наличия динамических ошибок прибора не равны измеряемым сигналам $x_1(t)$, но могут быть близки к ним. Перед измерением мы предварительно определяем весовую функцию прибора $\omega^*(t)$ при помощи тест-сигнала $x(t)$. При оценке весовой функции прибора за счет ошибок наблюдения может быть допущена ошибка $\Delta \omega = \omega^* - \omega$, где $\omega(\cdot)$ — истинная весовая функция прибора, которая остается неизвестной.

Следствием этой ошибки явится ошибка измерения $\Delta y = y^* - y$ сигнала на выходе прибора.

Возникает вопрос, какие сигналы x_1 могут измеряться прибором с весовой функцией ω^* ?

Будем говорить, что сигналы x и x_1 наблюдаемы при помощи прибора ω^* , если ошибки измерения Δy и Δy_1 удовлетворяют условию (4). Условие (4) можно понимать как условие выбора класса сигналов X_1 , инвариантного к ошибкам измерения Δu при использовании тест-сигнала x (2). Согласно доказанной теореме, для наблюдаемости достаточно, чтобы сигналы x_1 представлялись в виде (6), а соответствующие им операторы — в виде (9).

Рассмотрим неотрицательные эрмитовы операторы $L_1 L_1^*$, действующие в пространстве сигналов $L_2(0, T)$.

На основании (9) можно записать

$$L_1 L_1^* = R_1 L L^* R_1,$$

где сопряженный оператор определяется формулой

$$L_1^* u = \int_0^T x_1(t - \tau) u(t) dt, \quad 0 \leq \tau \leq T_1. \quad (12)$$

Условие (8) позволяет установить, что все $L_1 L_1^*$ коммутируют между собой, а также коммутируют с оператором $L L^*$, соответствующим тест-сигналу x .

На основании (8) и (9) можно заключить, что эрмитовы операторы $L_1^* L_1$, действующие в пространстве весовых функций $L_2(0, T_1)$, также перестановочны между собой и перестановочны с оператором $L^* L$.

Перестановочность эрмитовых операторов $L^* L$ и $L_1^* L_1$ в $L_2(0, T_1)$ должна иметь место, по-видимому, во всех интересных случаях. Действительно, пусть операторы $L^* L$ и $L_1^* L_1$ определены в $L_2(0, T_1)$. Тогда единственным скалярным коммутатором

$$C = L^* L L_1^* L_1 - L_1^* L_1 L^* L$$

в $L_2(0, T_1)$ может быть только нулевой оператор ⁽³⁾. Это означает, что либо L^*L и $L_1^*L_1$ перестановочны в $E \subset L_2(0, T_1)$, либо функции из E — нули операторов L^*L и $L_1^*L_1$. Последний случай, по-видимому, не так интересен как первый, так как система в этом случае не реагирует на сигналы из X_1 .

В заключение можно рассмотреть пример построения динамической системы.

Пусть весовая функция $\omega(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T_1$, определена из условия минимума среднего квадрата ошибки ε^2 (7а). Для определения весовой функции использовался тест-сигнал

$$x(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \sin \omega_k t + b_k \cos \omega_k t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Чтобы определить класс допустимых сигналов из неравенства (4), следует определить собственные функции $\theta_k(t)$ и собственные значения λ_k оператора LL^* , действующего в $L_2(0, T)$:

$$LL^*\theta_k = \lambda_k \theta_k,$$

где сопряженный оператор определен формулой (12). Для этого вначале можно определить собственные функции φ_k оператора L^*L и затем перейти к θ_k , воспользовавшись формулой

$$\theta_k = (\lambda_k)^{-1/2} L \varphi_k. \quad (*)$$

Непосредственная проверка позволяет установить, что φ_k имеют вид

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{i=1}^n (c_{ki} \sin \omega_i \tau + d_{ki} \cos \omega_i \tau), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Собственные числа λ_k и коэффициенты a_{ki} и d_{ki} определяются единственным образом подстановкой $\varphi_k(\tau)$ из последнего равенства в уравнение для φ_k и из условия нормировки. Определив $\varphi_k(\tau)$, можно пользуясь соотношением (*), найти необходимые функции $\theta_k(t)$. Ясно, что $\theta_k(t)$ имеют такой же вид, как $\varphi_k(\tau)$, но уже определены в интервале $(0, T)$. Тогда на основании теоремы допустимыми сигналами являются

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \theta_k(t), \quad 0 \leq \gamma_k \leq 1.$$

Если n велико, то класс функций $x_1(t)$ достаточно широк, так как произвольная функция $x(t) \in L_2(0, T)$ может быть представлена рядом Фурье с достаточной степенью точности. Этот результат интуитивно понятен, так как в случае линейных систем определяющей характеристикой тест-сигнала $x(t)$ является его спектр.

Спектр сигнала $x_1(t)$, для которого пригодна полученная модель, должен быть не «богаче» спектра тест-сигнала $x(t)$, если желательно, чтобы модель оставалась достаточно точной. Ограничение на γ_k связано с ошибкой в наблюдении сигнала $u(t)$.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
27 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. П. Леонов, ДАН, 198, № 1, 64 (1971). ² Б. Н. Петров, Принципы инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем. Тр. 1-го Международн. конгресса ИФАК, Изд. АН СССР, 1961. ³ П. Халмош, Гильбертово пространство в задачах, М., 1970.