

М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (M. N. OĞUZTÖRELİ),
Д. И. МАНЖЕРОН (D. J. MANGERON)

ОРТОНОМИРОВАННЫЕ ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА НА МНОГОМЕРНЫХ СЕТКАХ РАВНООТСТОЯЩИХ ТОЧЕК

(Представлено академиком И. Н. Векуа 6 X 1972)

1. Обобщенная теоретическая трактовка Ю. М. Березанского ⁽¹⁾, в рамках «неклассических» граничных задач, поливолновых уравнений*, введенных уже более сорока лет тому назад вторым из авторов, начиная с прототипа ⁽²⁾

$$D_m[A(x)D_mu(x) + \lambda B(x)u(x)] + \lambda[B(x)D_mu(x) + C(x)u(x)] \quad (1,1)$$

(где $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ и оператор $D_m \equiv \partial^m / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m$ — полная производная М. Пиконе ⁽³⁾) и рассмотренных затем авторами, зачастую в сотрудничестве с Л. Е. Кривошеиным ⁽⁴⁾, с различных точек зрения, в исследованиях, посвященных математическим системам сложной структуры ⁽⁵⁾, а также современные применения поливолновых уравнений, предложенные, например, Г. Биркхофом и В. Гордоном в области автоматического проектирования поверхностей любой формы ⁽⁶⁾, поощрили авторов продолжить поиски систем ортонормированных поливолновых полиномов, характеризующихся присутствием в них лишь степеней переменной $\theta_m = \prod_{i=1}^m x_i$, соответствующих различным многомерным областям и весовым функциям.

Так, например, поливолновые, ортонормированные в области m -измерений $x_{i,0} \leq x_i \leq x_{i,m,i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, полиномы $P_{2n,m}(\theta_m)$ и $P_{2n+1,m}(\theta_m)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, соответствующие весовой функции $w(\theta_m) \equiv 1$, а именно:

$$P_{2n,m}(\theta_m) = a_{2n,2n;m} \left(\theta_m^{2n} - \sum_{i=1}^n \frac{D_{2n,i;m}}{D_{2n,0;m}} \theta_m^{2n-2i} \right), \quad (1,2)$$

$$P_{2n+1,m}(\theta_m) = a_{2n+1,2n+1;m} \left(\theta_m^{2n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{D_{2n+1,i;m}}{D_{2n+1,0;m}} \theta_m^{2n+1-2i} \right), \quad (1,3)$$

где определители n -го порядка $D_{2n,0;m}$ и $D_{2n+1,0;m}$ содержат соответственно элементы $\alpha_{j,k;m}$ j -го столбца и k -й строки

$$(2n+2k-2j-1)^{-m}, \quad (2n+2k-2j+1)^{-m}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n; \quad (1,4)$$

определители n -го порядка $D_{2n,i;m}$ и $D_{2n+1,i;m}$, $i = 1, 2, \dots, n$, получаются из вышеуказанных определителей заменой элементов i -го столбца $\alpha_{i,k;m}$, $k = 1, 2, \dots, n$, соответственно элементами $(2n+2k-1)^{-m}$ и $(2n+2k+1)^{-m}$, а нормирующие факторы $a_{2n,2n;m}$ и $a_{2n+1,2n+1;m}$ определяются

* Как было указано в заметках авторов ⁽⁷⁾, поливолновые уравнения были названы некоторыми советскими, итальянскими, французскими, американскими, канадскими и румынскими математиками в работах, следующих за первыми проведенными вторым из авторов исследованиями, уравнениями Манжерона ⁽⁸⁻¹⁰⁾.

$$a_{2n, 2n; m} = 2^{-m/2} D_{2n, 0; m} \left\{ (4n+1)^{-m} D_{2n, 0; m}^2 + \sum_{i=1}^n (4n+1-4i)^{-m} D_{2n, i; m}^2 - \right. \\ \left. - 2D_{2n, 0; m} \sum_{i=1}^n (4n+1-2i)^{-m} D_{2n, i; m} + \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n (2n-2s-2t+1)^{-m} D_{2n, s; m} D_{2n+1, t; m} \right\}^{-1/2}, \quad (1,5)$$

$$a_{2n+1, 2n+1; m} = 2^{-m/2} D_{2n+1, 0; m} \left\{ (4n+3)^{-m} D_{2n+1, 0; m}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n (4n+3-4i)^{-m} D_{2n+1, i; m}^2 - 2D_{2n+1, 0; m} \sum_{i=1}^n (4n+3-2i)^{-m} D_{2n+1, i; m} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n (2n-2s-2t+3)^{-m} D_{2n+1, s; m} D_{2n+1, t; m} \right\}^{-1/2}, \quad (1,6)$$

удовлетворяют формулам Дарбу — Кристоффеля

$$\sum_{k=0}^n P_{k, m}(\theta_m) P_{k, m}(\theta'_m) = \\ = \frac{a_{n, n; m}}{a_{n+1, n+1; m}} \frac{P_{n+1, m}(\theta_m) P_{n, m}(\theta'_m) - P_{n, m}(\theta_m) P_{n+1, m}(\theta'_m)}{\theta_m - \theta'_m}, \\ \theta'_m = \prod_{i=1}^m x'_i, \quad (1,7)$$

и

$$\sum_{k=0}^n [P_{k, m}(\theta_m)]^2 = \\ = \frac{a_{n, n; m}}{a_{n+1, n+1; m}} \left[P_{n, m}(\theta_m) \frac{d}{d\theta_m} P_{n+1, m} - P_{n+1, m}(\theta_m) \frac{d}{d\theta_m} P_{n, m}(\theta_m) \right]. \quad (1,8)$$

При этом всякая тройка последовательных ортогональных полиномов удовлетворяет соотношению

$$P_{n, m}(\theta_m) = (A_{n, m} \theta_m + B_{n, m}) P_{n-1, m}(\theta_m) - C_{n, m} P_{n-2, m}(\theta_m), \quad (1,9)$$

причем постоянные $A_{n, m}$, $B_{n, m}$, $C_{n, m}$ определяются в данном случае формулами

$$A_{n, m} = \frac{a_{n, n; m}}{a_{n-1, n-1; m}} \frac{D_{n, 0; m}}{D_{n-1, 0; m}}, \quad B_{n, m} = 0, \\ C_{n, m} = \frac{a_{n, n; m}}{a_{n-2, n-2; m}} \left| \begin{array}{cc} D_{n, 1; m} & D_{n-1, 1; m} \\ D_{n, 0; m} & D_{n-1, 0; m} \end{array} \right| (D_{n-1, 0; m} D_{n-2, 0; m})^{-1}. \quad (1,10)$$

В настоящей заметке авторы, продолжая свои исследования в области обобщений на многие переменные классических специальных функций, а в частности полиномов, с точки зрения полиномиальных уравнений, имея в виду установление новых аппроксимирующих формул, удобных для

программирования на ЭВМ, приводят полиномы Чебышева, ортонормированные на сетках равноотстоящих точек гиперпараллелепипедов m -измерений.

2. Ортонормированные полиномы Чебышева поливолновой переменной $\theta_m = \prod_{i=1}^m x_i$, определяемые на гиперпараллелепипедной сетке m измерений

$R = \{x_{i,0} \leq x_i \leq x_{i,m_i}, i = 1, 2, \dots, m\}$, состоящей из $\prod_{i=1}^m (m_i + 1)$ точек $(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{m,i_m})$, $i_j = 0, 1, \dots, m_j, j = 1, 2, \dots, m$, выражаются формулой

$$P_{k;m_1,m_2,\dots,m_n}(\theta_m) = \|\alpha_{2k-t-s,m}^*\|^{1/2} \|\alpha_{2k-p-q+2,m}^*\|^{-1/2} \sum_{l=0}^k (-1)^l \theta_m^{k-l} \|\alpha_{2k-l-s,m}^*\|^{-1} D_{k+1,l;m}^*, \quad (2,1)$$

где k — степень рассматриваемого поливолнового полинома Чебышева, а

$$D_{k+1,l;m}^* = \begin{vmatrix} \alpha_{2k-1,m}^* & \alpha_{2k-2,m}^* & \alpha_{k-1,m}^* \\ \alpha_{2k-2,m}^* & \alpha_{2k-3,m}^* & \alpha_{k-2,m}^* \\ \alpha_{2k-l,m}^* & \alpha_{2k-l-1,m}^* & \alpha_{k-l+1,m}^* \\ \alpha_{2k-l-2,m}^* & \alpha_{2k-l-3,m}^* & \alpha_{k-l-1,m}^* \\ \alpha_{2k-l-3,m}^* & \alpha_{2k-l-4,m}^* & \alpha_{k-l-2,m}^* \\ \alpha_{k,m}^* & \alpha_{k-1,m}^* & \alpha_{1,m}^* \\ \alpha_{k-1,m}^* & \alpha_{k-2,m}^* & \alpha_{0,m}^* \end{vmatrix},$$

$$t, s = 1, 2, \dots, k; \quad p, q = 1, 2, \dots, k+1;$$

$$\alpha_{2k-t-s,m}^* = \prod_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i} (x_{ij})^{2k-t-s}. \quad (2,2)$$

3. Не записывая здесь аппроксимирующий полином функции $z = f(x)$, $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ (z принимает значения $z_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ в точках (x_{j, i_j}) , $j = 1, 2, \dots, m$; $i_j = 0, 1, \dots, m_j$), получаемый на основании использования определенных выше ортонормированных поливолновых полиномов Чебышева *, и подчеркивая непрестанный интерес научного мира к бессмертному наследию Чебышева в области непрерывной и дискретной аппроксимации в рамках одной переменной (например, лишь в последнее десятилетие в журнале «Numerische Mathematik» 23 научных труда содержат даже в заглавии светлое имя П. Л. Чебышева ⁽¹¹⁾), авторы предполагают изложить в последующих заметках соответствующие обобщен-

ной поливолновой переменной $\theta^* = \prod_{i=1}^m x_i^{n_i}$, формулы для ортонормированных полиномов Чебышева, а также и для некоторых других классов полиномов и привести системы сложной структуры (например, дифференциально-разностные), которым удовлетворяют найденные полиномы. Ал-

* Так же как и соответствующие случаи, когда все (x_{j, i_j}) принимают целочисленные значения (вместо $(x_{1, i_1}, x_{2, i_2}, \dots, x_{m, i_m})$ в общем случае) ^(12, 13).

гориформические детали и необходимые доказательства предполагается поместить в «Известиях Ясского политехнического института (Buletinul Institutului Politehnic din Iasi)».

Университет провинции Альберта
Эдмонтон, Канада

Поступило
10 V 1972

Ясский политехнический институт
Румыния

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ju. M. Berezenski, Am. Math. Soc. Trans. Monographs, 1968, Ch. IV, p. 756, 787. ² D. Mangeron, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, (6), 16, 305 (1932); Rend. Accad. Sci. Fis., Math., Napoli, (4), 2, 29 (1932); Giorn. Mat. Battaglini, Napoli, 71, 89 (1933). ³ M. Picone, Ann. Sci. Univ. Jassy, 26, Sect. 1, 182 (1940); Annuario Accad. dei Roma, 40, 1 (1968); La Mia Vita, Roma, 1972. ⁴ D. Mangeron, L. E. Krivoshein, Rev. Roumaine Sci. Techn., Méc. Appl., 9, 1195 (1964); 10, 3 (1965); 11, 3 (1966); Rend. Sem. Math. Univ. Padova, 33, 226 (1963); 34, 344 (1964); 35, 341 (1965). ⁵ D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 67, 1488 (1970). ⁶ G. Birkhoff, Approximations with Special Emphasis of Spline Functions, N. Y., 1969, p. 209; W. Gordon, ibid., p. 236, 276. ⁷ М. Н. Огюзторели, Д. И. Манжерон, ДАН, 196, 293, 523 (1971). ⁸ M. Salvadori, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 5, 51 (1936). ⁹ И. Н. Векуа, Вестн. АН СССР, № 11, 76 (1956). ¹⁰ S. Easwaran, A Study on Certain Higher Order Partial Differential Equations of Mangeron, Doct. Dissertation, Univ. of Alberta, Dept. Math., 1972. ¹¹ Numerische Mathematik, 3, 180, 157, 147 (1961); 4, 262 (1962); 6, 124, 320, 211, 235, 1 (1964); 7, 176 (1965); 9, 177, 341 (1966); 10, 289, 147, 51 (1967); 12, 242, 57, 8 (1968); 14, 24 (1969); 13, 260 (1969); 14, 383; 15, 175 (1970); 16, 16 (1970). ¹² P. L. Tchebycheff, Oeuvres, I, II, N. Y., 1961; Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, I—V, Изд. АН СССР, 1951. ¹³ Л. П. Грабарь, Таблицы полиномов Чебышева, ортонормированных на системе равноотстоящих точек, ВЦ АН СССР, М., 1965.