

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

О НЕСКОЛЬКИХ НОВЫХ ПРИНЦИПАХ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 V 1972)

1. Рассмотрим действующие в банаховом пространстве E и определенные на всем E операторы A , удовлетворяющие условию

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x - Ax\| = \infty. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть удовлетворяющий условию (1) оператор A вполне непрерывен и непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть каждому $x_0 \in E$ соответствуют такие положительные $r(x_0)$ и $\beta(x_0)$, что у всех операторов $A'(x)$ при $\|x - x_0\| \leq r(x_0)$ нет собственных значений на интервале $(1 - \beta(x_0), 1)$.

Тогда уравнение

$$x = Ax + y \quad (2)$$

имеет по крайней мере одно решение при каждом $y \in E$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть вращение γ_0 векторного поля $x - Ax$ на сферах $\|x\| = r$ больших радиусов r равно 1 или -1 .

Тогда при каждом $y \in E$ множество решений уравнения (2) связно.

Автору не известен пример такого оператора A , удовлетворяющего условию теоремы 1, что $|\gamma_0| \neq 1$. Если, например, A асимптотически линейен и 1 не является собственным значением оператора $A'(\infty)$, то $\gamma_0 = (-1)^p$, где p — сумма кратностей больших, чем 1, собственных значений оператора $A'(\infty)$ (см. (1)).

В условиях теорем 1 и 2 предположение об отсутствии собственных значений на интервалах $(1 - \beta(x_0), 1)$ можно заменить предположением об их отсутствии на интервалах $(1, 1 + \beta(x_0))$.

Для доказательства теорем 1 и 2 применяются ставшие стандартными приемы теории вполне непрерывных векторных полей.

2. Продолжим изучение уравнения (2) с оператором, удовлетворяющим условию (1), и укажем теоремы о единственности решений.

Теорема 3. Пусть удовлетворяющий условию (1) оператор A вполне непрерывен и непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть число 1 не является собственным значением ни одного оператора $A'(x)$, $x \in E$.

Тогда уравнение (2) при каждом $y \in E$ имеет единственное решение.

Откажемся теперь от полной непрерывности оператора A .

Теорема 4. Пусть удовлетворяющий условию (1) оператор A непрерывно дифференцируем по Фреше, причем операторы $I - A'(x)$, $x \in E$, непрерывно обратимы и при каждом положительном r

$$\|[I - A'(x)]^{-1}\| \leq b(r), \quad \|x\| \leq r. \quad (3)$$

Тогда при каждом $y \in E$ уравнение (2) имеет единственное решение.

Разрешимость уравнения (2) в условиях теорем 3 и 4 очевидна. Для доказательства единственности решения можно применить следующую схему рассуждений. Во-первых, сопоставим каждому $y \in E$ множество всех решений уравнения (2); из обратимости линейных операторов $I - A'(x)$ вытекает, что построенная многозначная функция «в малом» распадается на однозначные непрерывные ветви. Во-вторых, из односвязности (или

звездности) пространства E вытекает, что каждая построенная в малой окрестности какой-либо точки непрерывная ветвь определенной уравнением (2) многозначной функции $x(y)$ однозначно продолжима на все пространство; множества значений отдельных ветвей друг с другом не пересекаются, так как многозначное отображение $x(y)$ однолистно. В-третьих, множество значений каждой непрерывной ветви функции $x(y)$ является открытым множеством; таким образом, пространство E является объединением стольких открытых непересекающихся множеств, сколько есть однозначных ветвей у функции $x(y)$. Для завершения доказательства остается сослаться на связность E .

Теоремы 1–4 дополняют некоторые результаты, полученные в (2–4).

3. Недавно Р. Л. Фрум-Кетков (5) указал новый подход к доказательству существования неподвижных точек у нелинейных непрерывных операторов A . Основное (но не единственное) условие одной из его теорем заключается в существовании такого компактного множества F , что $\rho(Ax, F) \leq q\rho(x, F)$, где $q < 1$. Этот результат в дальнейшем обсуждался и развивался Р. Д. Нуссбаумом (6, 7). В этом пункте мы укажем некоторые дополнения к интересной теореме Фрум-Кеткова для операторов в гильбертовом пространстве H .

Во всем пункте через T обозначается замкнутое выпуклое множество в H , а через F — ограниченное подмножество множества T . Изучаются непрерывные операторы A , для которых

$$\rho(Ax, F) \leq \rho(x, F), \quad x \in T. \quad (4)$$

Теорема 5. Пусть F компактно, а оператор A удовлетворяет условию (4).

Тогда A имеет в множестве T по крайней мере одну неподвижную точку.

Мерой некомпактности $\mu(N)$ ограниченного множества $N \subset H$ назовем (8, 9) инфимум тех ε , при которых в N есть конечная ε -сеть. Оператор A называется уплотняющим (9), если для каждого лежащего в области определения оператора A ограниченного некомпактного множества N справедливо неравенство $\mu(AN) < \mu(N)$.

Теорема 6. Пусть удовлетворяющий условию (4) оператор A уплотняющий.

Тогда A имеет в множестве T по крайней мере одну неподвижную точку.

Для доказательства этих теорем вначале нужно построить оператор P , относящий каждой точке $x \in H$ такую точку Px из замкнутой выпуклой оболочки M множества F , для которой $\|x - Px\| = \rho(x, M)$. Затем нужно построить оператор $B = PA$ и заметить, что его неподвижные точки совпадают с неподвижными точками оператора A . Существование же неподвижной точки у оператора B в условиях теоремы 5 вытекает из принципа Шаудера, а в условиях теоремы 6 — из принципа Б. Н. Садовского (9).

Теорема 6 переносится на операторы, уплотняющие по отношению к любой такой мере некомпактности, для которой $\mu(PN) \leq \mu(N)$.

Автор выражает благодарность П. П. Забрейко, С. И. Похожаеву и Б. Н. Садовскому за интересное обсуждение работы.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
26 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956. ² М. А. Красносельский, Тр. семинара по функциональному анализу, Воронеж, в. 6 (1962). ³ С. И. Похожаев, Функциональный анализ и его приложения, 3, № 2 (1964). ⁴ Р. И. Качуровский, ДАН, 192, № 5 (1970); 196, № 3, (1971); 197, № 3 (1971). ⁵ Р. Л. Фрум-Кетков, ДАН, 155, № 6 (1967). ⁶ R. D. Nussbaum, Bull. Am. Math. Soc., 75 (1969). ⁷ R. D. Nussbaum, Math. Ann., 191, № 3 (1971). ⁸ К. Куратовский, Топология, М., 1966. ⁹ Б. Н. Садовский, Функциональный анализ и его приложения, 1, № 1 (1967).