

Н. Т. ПЕТРОВ (Болгария).

О ДЛИНЕ ПРОСТЫХ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Новиковым 27 IV 1972)

1. Пусть группа G порождается некоторым своим подмножеством S таким, что $S = S^{-1}$, $1 \notin S$. Длинной элемента $x \in G$ относительно S называется наименьшее целое неотрицательное число m , обозначаемое через $l_S(x)$, такое, что x есть произведение m элементов из S . Длинной группы G относительно S считаем величину

$$l_S(G) = \max_{x \in G} l_S(x).$$

В группах Кокстера понятие длины элемента относительно канонической системы образующих является рабочим инструментом (см. (2)). Длину симплектических и ортогональных групп относительно множества симметрий исследовал Э. Картан и Ж. Дьедонне (см. (1)). Отметим, в частности, что эта длина растет неограниченно вместе с размерностью базисного пространства. Аналогично, $\lim_{n \rightarrow \infty} l_S(\mathcal{A}_n) = \infty$, если в качестве S

в знакопеременных группах $\mathcal{A}_n$ взять, например, множество инволюций (элементов второго порядка) вида $(i, j)(k, l)$, $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Положение, однако, радикально меняется, когда S — множество всех инволюций. Именно группами, порожденными инволюциями, мы и будем заниматься, причем нас будут интересовать в основном простые группы конечного порядка.

Всюду в дальнейшем предполагается, что S — множество всех инволюций группы G ; вместо $l_S(x)$, $l_S(G)$ будем писать $l(x)$, $l(G)$, а под длиной будем понимать длину относительно множества всех инволюций. Точное вычисление $l(G)$ довольно затруднительно и осуществлено лишь для некоторых специальных классов групп (см. предложение 1).

А. И. Кострикин, по инициативе которого предпринято настоящее исследование, высказал предположение, что длина простых групп не может быть сколь угодно большой и, возможно, даже, что всегда $l(G) \leq 4$. Из очень грубых соображений о размерности централизаторов инволюций для длины алгебраической простой группы G над алгебраически замкнутым полем, вероятно, должна получиться (по мысли Ж. Титса) оценка $l(G) \leq 3$. Если даже это так, не совсем ясно, как извлечь отсюда оценку длины известных конечных простых групп.

Нами доказывается следующая

Теорема. *Существует постоянная L такая, что $l(G) \leq L$ для любой группы G из класса всех известных (к настоящему времени) конечных простых групп.*

Список известных простых групп состоит из 16 бесконечных серий групп Шевалле (нормального и скрещенного типов (3)), серии групп $\mathcal{A}_n$ и из 20 спорадических групп (4). Спорадические группы могут, самое большое, повлиять на величину L , что, впрочем, тоже представляется маловероятным. Из доказательства, заключающегося в проверке утверждения для различных серий групп, видно, что $L = 20$ — допустимая постоянная. Как правило, мы не стремимся к наилучшим достижимым оценкам, поскольку для получения истинного значения $l(G)$ наш метод не приспособлен. Сформулируем упомянутое выше

Предложение 1. Пусть G — группа Вейля (простой группы Шевалле) или же одна из групп $\mathfrak{A}_{10}$, $\mathfrak{A}_{14}$, $PSL(2, q)$, $q \equiv 0, 1 \pmod{4}$; $PSp(4, q)$, $q \equiv 0, 1 \pmod{4}$; J_1 , $|J_1| = 175\,560$; J_2 , $|J_2| = 604\,800$. Тогда $l(G) = 2$.

Пусть G — одна из групп $\mathfrak{A}_n$, $n > 6$, $n \neq 10, 14$; $PSL(2, q)$; $q \equiv 3 \pmod{4}$; $PSp(4, q)$, $q \equiv 3 \pmod{4}$; ${}^2B_2(q)$, $q = 2^{2n+1}$; ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$; M_{12} . Тогда $l(G) = 3$. Далее $l(PSU(3, 3^2)) = 4$.

Это утверждение, известное для групп Вейля (Картер, ⁽⁵⁾), получается прямой проверкой, основанной либо на знании таблицы характеров группы G , либо на ее разложении Брюа, либо, наконец, на строении p -локальных подгрупп. Последнее соображение позволяет зачастую выделять группы длины 2, т. е. группы, все элементы которых строго вещественные.

2. Приведем теперь набросок доказательства теоремы. Используемые нами обозначения стандартные (см. ⁽³⁾ или ⁽⁶⁾). Пусть G — какая-нибудь группа Шевалле. Любой ее элемент x сопряжен с некоторым элементом вида uhn_i , где u, h принадлежат подгруппам U, H , а n_i — представитель смежного класса группы N по H . Стало быть, $l(x) \leq l(u) + l(h) + l(n_i)$ и задача сводится к оценкам сверху для $l(U)$, $l(H)$ и $l(n_i)$. Следует отметить, что, хотя N/H и группа Вейля W группы G изоморфны, мы не можем воспользоваться предложением 1, поскольку вложения W в G , вообще говоря, нет. Техническое осуществление отдельных оценок $l(U)$, $l(H)$ и $l(n_i)$ элементарно, но громоздко. Последовательно рассматриваются бесконечные серии $A_n(K)$, $B_n(K)$, ... Используются некоторые предварительные результаты о группе $SL(n, K)$ в ее матричной реализации.

В этой заметке доказательство проведено только для серий $A_n(K) \cong \cong PSL(n+1, K)$, $D_n(K)$ и ${}^2D_n(K)$. Это, пожалуй, самые легкие случаи, но они достаточно хорошо иллюстрируют общее доказательство.

3. В дальнейшем I_m — единичная матрица порядка m . $\overline{SL}(n, K)$ — фактор-группа $SL(n, K) / \langle r \rangle$, где $r = (-1)^{n+1} I_n$. Образ матрицы или подгруппы H из $SL(n, K)$ в $\overline{SL}(n, K)$ будем обозначать символом $\overline{H}$.

Лемма 1. Пусть $n > 2$, A — верхняя треугольная матрица из $SL(n, K)$. Тогда $l(A) \leq 6$.

Доказательство. Пусть n четное. Можно предполагать, что A приведена к жордановой форме. При подходящих b_i , b'_i , c_i , c'_i матрица A подобна произведению BC , где

$$B = B_1 + B_2 + \dots + B_m, \quad m = n/2, \quad C = I_1 + C_1 + \dots + C_{m-1} + I_1,$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_i & b'_i \\ 0 & b_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} c_i & c'_i \\ 0 & c_i^{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицу B (соответственно C) нетрудно записать в виде произведения 4 (соответственно 2) инволюций. Аналогично поступаем и при нечетном n .

Замечание. Несколько более сложные рассуждения показывают, что $l(A) \leq 4$ в $SL(n, K)$ при $n \neq 4l + 2$ и $l(\overline{A}) \leq 4$ в $\overline{SL}(n, K)$ при $n = 4l + 2$.

Пусть $\overline{H}$ — подгруппа всех диагональных матриц в $SL(n, K)$, а $\tilde{N}$ — подгруппа мономатричных матриц.

Лемма 2. Существуют представители $n_1, n_2, \dots$ смежных классов $\tilde{N}$ по $\overline{H}$ такие, что $l(n_i) \leq 2$ в $SL(n, K)$ при $n \neq 4l + 2$ и $l(\tilde{n}_i) \leq 2$ (в $\overline{SL}(n, K)$) при $n = 4l + 2$.

Из лемм 1 и 2 вытекает

Предложение 2. $l(PSL(n, K)) \leq 8$ при $n > 2$.

Согласно сделанному выше замечанию, можно утверждать, что $l(PSL(n, K)) \leq 6$, а в случае алгебраически замкнутого поля K , очевидно, имеет место неравенство $l(PSL(n, K)) \leq 4$.

4. Пусть Π — система корней типа D_n , $n \geq 4$, с базисом $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, Π^+ — множество положительных корней при упорядочении $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$

... $> \alpha_n$. Как обычно, $x_r(t)$ обозначает однопараметрическую подгруппу (в $D_n(K)$), соответствующую корню r .

Если $r, s, r+s$ — корни, имеет место формула

$$x_r(t)x_s(u)x_r(-t) = x_s(u)x_{r+s}(\pm tu). \quad (1)$$

Следующая лемма играет решающую роль в рассуждениях о длине $l(D_n(K))$. Имеются ее аналоги для большинства других типов групп Шевалле.

Лемма 3. Пусть $x = \prod_{r \in \Pi^+} x_r(t_r)$, $t_{\alpha_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq n-2$. Существует элемент $y \in U$ такой, что

$$yxy^{-1} = \prod_{i=2}^{n-1} x_{\bar{\alpha}_{n-i}}(t'_{n-i}) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} x_{\alpha_{n-j}}(t_{\alpha_{n-j}}),$$

где $\bar{\alpha}_k = \alpha_k + 2\alpha_{k+1} + \dots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$, $1 \leq k \leq n-2$. При $n > 4$ можно предполагать $t'_1 = 0$.

Лемма 4. Длина любого унитарного элемента в $D_n(K)$ не превосходит 6.

Доказательство. Предположим сначала, что элемент x из U удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно, $x = x_1x_2$, где

$$x_1 = \prod_{i=2}^{n-1} x_{\alpha_{n-i}}(u_{n-i}) \cdot x_{\alpha_n}(u_n) x_{\alpha_{n-1}}(u_{n-1}), \quad x_2 = \prod_{i=2}^{n-1} x_{\alpha_{n-i}}(t_{n-i})$$

и $u_1 = 0$ при $n > 4$.

Если $h \in H$, $z \in U$, то hzh^{-1} можно записать в каноническом виде, используя матрицу Картана системы Π . Это дает возможность построить в явном виде инволюцию $h_1 \in H$ такую, что $h_1x_1h_1 = x_1^{-1}$. Следовательно, $l(x_1) \leq 2$.

Покажем, что $l(x_2) \leq 2$. Пусть

$$G_1 = \left\langle x_r(t) \mid r = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \alpha_i \in \Pi, t \in K \right\rangle.$$

Существует ^(5, 7) эпиморфизм $\varphi: SL(n, K) \rightarrow G_1$. При четном n можно показать, что $-I_n \in \ker \varphi$. Поскольку $t_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n-2$, можно предполагать, что x_2 есть образ (при φ) матрицы $I_n + (a_{ij})$, где все $a_{ij} = 0$, кроме $a_{k, k+1} = 1$, $k = 1, 2, \dots, n-2$. Но последняя матрица подобна произведению двух инволюций из $SL(n, K)$, следовательно, $l(x_2) \leq 2$ и $l(x) \leq 4$.

Если же x — произвольный элемент из U , то zx с $z = \prod_{i=2}^{n-2} x_{\alpha_{n-i}}(v_{n-i})$ и при подходящих $v_{n-i} \in K$ удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно, $l(x) \leq l(z^{-1}) + l(zx) \leq 2 + 4 = 6$.

Замечание. Если существует $\lambda \in K$, $\lambda^2 + 1 = 0$, то $l(U) \leq 4$. Когда $\text{char } K = 2$, можно показать, что $l(U) \leq 3$.

Лемма 5. Представители смежных классов N по H можно выбрать так, чтобы их длина не превосходила 2, если $\text{char } K = 2$, или 3, если $\text{char } K \neq 2$.

Лемма 6. $l(H) \leq 2$ при четном n и $l(H) \leq 3$ при нечетном n .

Доказательство. Если n четное, в группе W есть инволюция w_0 такая, что $w_0(\alpha_i) = -\alpha_i$. Оказывается, что ей соответствует инволюция $n_0 \in N$, причем $n_0 h n_0 = h^{-1}$ для любого $h \in H$.

Приблизительно так же рассматривается случай, когда n нечетное.

5. Далее будем рассматривать группы ${}^2D_n(q^2)$, $n \geq 4$ ⁽⁷⁾.

Пусть F — конечное поле из q^2 элементов, $r \mapsto \bar{r}$ — симметрия схемы Динкина системы Π , $\bar{t} = t^q$, $t \in F$. Все остальные обозначения взяты из ⁽⁷⁾.

Лемма 7. Пусть элемент $x \in U^1 \subset {}^2D_n(q^2)$ удовлетворяет условиям леммы 3.

Тогда найдется $y \in U^1$, для которого

$$xyx^{-1} = \prod_{i=2}^{n-1} x_{\alpha_{n-i}}(t'_{n-i}) \prod_{j=0}^{n-1} x_{\alpha_{n-j}}(t_{\alpha_{n-j}}),$$

$t'_{n-i} = \overline{t'_{n-i}}$, $t_{\alpha_n} = \overline{t_{\alpha_{n-1}}}$. При $n > 4$ можно предполагать $t'_1 = 0$.

Доказательство. Пусть $r_1, r_2, r_1 + r_2$ — корни, $r_1 = \bar{r}_1, r_2 \neq \bar{r}_2$. Используя (1), легко доказать, что

$$[x_{r_1}(t), x_{r_2}(u) x_{\bar{r}_2}(u)] = x_{r_1+r_2}(stu) x_{r_1+\bar{r}_2}(st\bar{u}) x_{r_1+r_2+\bar{r}_2}(\pm tu\bar{u}); \quad (2)$$

здесь $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Положим $E_i^1 = E_i \cap U^1$. Заметим, что множества Π_i инвариантны относительно отображения $r_1 \mapsto \bar{r}_1$. Далее повторяется доказательство леммы 3. На этот раз используется формула (2).

Лемма 8. $l(U^1) \leq 8$.

Лемма 9. Представители смежных классов N^1 по H^1 можно выбрать так, чтобы их длина не превосходила 3.

Лемма 10. $l(H^1) \leq 3$.

Предложение 3. $l(D_n(K)) \leq 12$, $l({}^2D_n(q^2)) \leq 14$.

Пусть Σ — множество групп $E_6(K), E_7(K), E_8(K), F_4(K), G_2(K)$, где K пробегает класс всех полей. Ограниченность функции $l(G)$ на Σ вытекает, например, из следующего простого соображения. Существует постоянная L_1 такая, что если $G \in \Sigma$, $x \in G$, то $x = \prod_{r \in J} x_r(t_r)$, $\text{card}(J) \leq L_1$.

Легко убедиться, однако, что $l(x_r(t)) \leq L_2$, где L_2 — некоторая постоянная, не зависящая от G . Следовательно, $l(G) \leq L_1 L_2$.

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Кострикину за помощь и руководство при выполнении настоящей работы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Э. Артин, Геометрическая алгебра, «Наука», 1969. ² N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, ch. 4, 5, 6, Paris, 1968. ³ Р. Картер, Сборн. пер. Математика, 10, 5, 3 (1966). ⁴ W. Feit, Actes, Congres Intern. Math., 1, 55 (1970). ⁵ Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1970. ⁶ R. Steinberg, Pacific J. Math., 9, 875 (1959). ⁷ R. Steinberg, Lectures on Chevalley Groups, Yale Univ., 1967.