Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 517.9 — *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Ю. А. СЕМЕНОВ

ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛУГРУПП, ОПРЕДЕЛЕННОГО МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ, И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 VIII 1971)

Пусть A и B — неограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Мы будем рассматривать случай, когда алгебраическая сумма $A+B$ может иметь область определения $\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{D}(B)=\{0\}$. Такая ситуация возникает в квантовой механике многих систем. Для определения гамильтониана системы будем применять метод билинейных форм ([1], [2]). Выбор полного гамильтониана при этом оправдывается с физической точки зрения: для рассматриваемого класса потенциалов фейнмановский интеграл по траекториям сходится к пропагатору, определенному методом билинейных форм. Известно, что в случае потенциалов Като ([3]) можно воспользоваться теоремой о произведении полугрупп ([4], [5]). В том случае, когда область $\mathscr{D}(A)\cap\mathscr{D}(B)$ не плотна в $\mathscr{H}$, теорема о произведении полугрупп неприменима. Однако в работе ([6]) установлен результат, позволяющий частично обойти указанную трудность.

В настоящей работе мы приводим теорему, позволяющую расширить класс потенциалов, для которых фейнмановский интеграл по траекториям сходится к пропагатору e^{itH}, где H определяется методом билинейных форм (см. следствия теорем 1 и 2). Изложение приведем в общем виде.

1. Пусть $I[u, v]$ — билинейная форма в $\mathscr{H}$ с областью определения $\mathscr{D}(I)=X\times Y$; $X, Y\subset\mathscr{H}$. По определению, $I^*[v,u]=\overline{I[u,v]}$ с $\mathscr{D}(I^*)=Y\times X$, где черта означает комплексное сопряжение. Если $X=Y$, то положим

$$\operatorname{Re} I={}^1/_2(I+I^*),\qquad \operatorname{Im} I=\frac{1}{2i}(I-I^*).$$

Пусть T и A — линейные операторы в $\mathscr{H}$ такие, что $\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(A)$ и $\|Au\|\leqslant a\|Tu\|+b\|u\|$ $\forall u\in\mathscr{D}(T)$, где a и b — некоторые неотрицательные константы, причем $a<1$. Тогда говорят, что оператор A T-ограничен. Пусть $\{Z^t,\ t\geqslant 0\}$ — полугруппа линейных операторов сжатия класса (C_0) в $\mathscr{H}$. Пусть C — инфинитезимальный оператор, порождающий полугруппу Z^t. Тогда $-C$ есть максимальный аккретивный (м.а.) оператор, так что $(-C)^{1/2}$ определен и тоже есть м.а. оператор ([1]). В частности, если

$$|\operatorname{Im}(-Cu, u)|\leqslant\gamma\operatorname{Re}(-Cu, u)$$

для некоторого $\gamma>0$ и $\forall u\in\mathscr{D}(C)$, то мы можем на $\mathscr{D}(C)$ ввести скалярное произведение

$$(u, v)_{\mathscr{H}_C}=\operatorname{Re}(-Cu, v)+\lambda(u, v),$$

где λ — произвольное положительное конечное число. Пополнение $\mathscr{D}(C)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_C}=(\cdot,\ \cdot)^{1/2}_{\mathscr{H}_C}$ обозначим через $\mathscr{H}_C$. Очевидно, $\mathscr{H}_C\subset\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_C$ плотно в $\mathscr{H}$ и непрерывно в него вложено. Отождествляя $\mathscr{H}$ с его антидвойственным пространством и обозначая через $\mathscr{H}_C^*$ пространство, антидвойственное к $\mathscr{H}_C$, получаем

$$\mathscr{H}_C \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_C^*, \tag{1}$$

где каждое пространство плотно в последующем.

Предложение 1. *Если A есть непрерывное отображение $\mathscr{H}_C$ в $\mathscr{H}_C^*$ (т. е. $A \in L(\mathscr{H}_C, \mathscr{H}_C^*)$), и если, кроме того,*

$$|(Au, u)| \geqslant \gamma \|u\|^2_{\mathscr{H}_C}, \ \gamma > 0, \quad \forall u \in \mathscr{H}_C,$$

то A есть изоморфизм из $\mathscr{H}_C$ на $\mathscr{H}_C^*$.

Действительно, без труда проверяется, что образ $\mathscr{H}_C$ при отображении A плотен и замкнут в $\mathscr{H}_C^*$.

Как следствие предложения 1 и теоремы Хилле — Иосиды имеем

Предложение 2. *Пусть задана некоторая цепочка гильбертовых пространств $\mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_+^*$, обладающая свойствами, аналогичными свойствам цепочки (1), и пусть $A \in L(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_+^*)$. Предположим, что для некоторых $\lambda > 0$ и $\delta > 0$ справедливо*

$$|((-A+\lambda)u, u)| \geqslant \delta \|u\|_{\mathscr{H}_+} \quad \forall u \in \mathscr{H}_+,$$

и, кроме того, пусть оператор $-A$ аккретивен. Если A_0 — сужение оператора A на $\mathscr{D}(A_0) = \{u \in \mathscr{H}_+;\ Au \in \mathscr{H}\}$, то A_0 — инфинитезимальный оператор, порождающий сжимающую полугруппу класса (C_0).

2. Теорема 1. *Пусть A — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы P^t класса (C_0) в $\mathscr{H}$. Предположим, что*

$$|\mathrm{Im}\,(-Au, u)| \leqslant \gamma \,\mathrm{Re}\,(-Au, u)$$

при некотором $\gamma > 0$ и $\forall u \in \mathscr{D}(A)$. Пусть $\mathscr{H}_A \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_A^*$ — цепочка пространств со свойствами (1), построенная по оператору A. A расширяется по непрерывности до оператора $\hat{A} \in L(\mathscr{H}_A, \mathscr{H}_A^*)$.

Пусть $\hat{B}$ — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы Q^t класса (C_0) в $\mathscr{H}$. Предположим, что существует некоторая цепочка гильбертовых пространств $\mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_+^*$ со свойствами (1); причем выполняются следующие условия:

I) $\|u\|\mathscr{H}_+ \geqslant \nu \|u\|\mathscr{H}_A$ *при некотором $\nu > 0$ и $\forall u \in \mathscr{H}_A$;*

II) $\mathscr{D}(B) \cap \mathscr{H}_+$ *плотно в $\mathscr{H}_+$ и B на этой области расширяется по непрерывности оператора $\hat{B} \in L(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_A^*)$;*

III) *сужение оператора $(-B)^{1/2}$ на некоторую область, плотную в $\mathscr{H}_+$, непрерывно из $\mathscr{H}_+$ в $\mathscr{H}$. Сужение оператора $(-B^*)^{1/2}$ на некоторую область, плотную в $\mathscr{H}_A$, непрерывно из $\mathscr{H}_A$ в $\mathscr{H}$.*

Пусть $\hat{B}$ есть сужение оператора $\hat{B}$ на $\mathscr{H}_A$. Тогда

а) *оператор $\hat{A} + \hat{B}$ имеет сужение C в $\mathscr{H}$, которое является инфинитезимальным оператором, порождающим сжимающую полугруппу R^t класса (C_0);*

б) *при $n \to \infty$ произведение $[P^{t/n}Q^{t/n}]^n$ сходится в сильной операторной топологии к R^t.*

Замечание. Теорема 1 непосредственно неприменима к уравнению Шредингера, ибо $\mathrm{Re}\left(\frac{i}{2m}\Delta u, u\right) = 0$ при всех $u \in \mathscr{D}(\Delta)$, $m > 0$. Однако справедлива следующая

Теорема 2 [6]. *Пусть A — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы класса (C_0) в $\mathscr{H}$. Предположим, что комплексное число σ с $|\sigma| = 1$ может быть выбрано так, что $|\mathrm{Im}(-\sigma Au, u)| \leqslant \leqslant \gamma\,\mathrm{Re}\,(-\sigma Au, u)$ для некоторого $\gamma > 0$. Пусть $\mathscr{H}_{\sigma A} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_{\sigma A}^*$ — цепочка гильбертовых пространств со свойствами (1), построенная по оператору σA. Пусть α есть любое комплексное число такое, что $\mathrm{Re}\,(\alpha Au, u) \leqslant 0 \quad \forall u \in \mathscr{D}(A)$. Пусть $\hat{B}$ — диссипативный оператор в $L(\mathscr{H}_{\sigma A}, \mathscr{H}_{\sigma A}^*)$ с нормой, строго меньшей, чем $|\alpha|$.*

Тогда $\alpha\hat{A} + \hat{B}$ $(\in L(\mathscr{H}_{\sigma A}, \mathscr{H}_A^*))$ имеет сужение C_α в $\mathscr{H}$, которое порождает сжимающую полугруппу класса (C_0), сильно непрерывную по α при фиксированном t.

С л е д с т в и е из теорем 1 и 2. *Пусть* $\mathscr{H} = L^2(R^l)$. *Пусть* V — *мультипликативный самосопряженный оператор в* $\mathscr{H}$. *Предположим, что оператор* $|V|^{1/2} H_0^{1/2}$ *ограничен, где* $H_0 = -\frac{1}{2m}\Delta$. *Построим пространство* $\mathscr{H}_+$ *следующим образом. Область* $\mathscr{D}(|B|) = \mathscr{D}(V)$ *пополним по норме* $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_+} = (\cdot, (|V|+1), \cdot)^{1/2}$.

Тогда

$$\exp(-itH) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n\to\infty} [\exp(-iH_{0,\varepsilon}\, t/n) \exp(-iVt/n)]^n,$$

где H *определен методом билинейных форм и* $H_{0,\varepsilon} = -\frac{1}{2(m+i\varepsilon)}\Delta$, $\varepsilon > 0$, $\hbar = 1$.

3. Пусть $\mathscr{H} = L^2(R^3)$.

П р и м е р 1. Рассмотрим $V(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} W(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n)$,

где

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} |\mathbf{x}|^{-3/2}, & |\mathbf{x}| < 1, \\ 0, & |\mathbf{x}| \geqslant 1, \end{cases}$$

а q_n пробегает все точки в R^3 с рациональными координатами. Тогда $W \notin L^2(R^3)$, но $W \in L^1(R^3) \cap L^{3/2}(R^3)$. Поскольку $\sum_{n=1} 2^{-n} \|W(\cdot, -\mathbf{q}_n)\|_{L^a} < \infty$ для $a = 1, 3/2$, то $V \in L^1 \cap L^{3/2}$. Каждая функция из $\mathscr{D}(H_0) = \mathscr{D}(\Delta)$ непрерывна и ограничена (см. [1], стр. 301). Поэтому $\mathscr{D}(V) \cap \mathscr{D}(H_0) = \{0\}$. В то же время оператор $|V|^{1/2}$ $H_0^{1/2}$-ограничен для всех $V \in L^{3/2}(R^3)$.

П р и м е р 2. Пусть $V(\mathbf{x})$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\|V\|_S^2 = \int |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2} \cdot |V(\mathbf{x})| \cdot |V(\mathbf{y})| d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} < \infty$. Обозначим множество таких функций через S. В работе [2] показано, что S с нормой $\|\cdot\|_S$ есть полное нормированное пространство и оператор $|V|^{1/2}$ $H_0^{1/2}$-ограничен. Тогда для каждого вещественного V из $S + L^\infty(R^3)$ справедливо следствие из теорем 1 и 2.

П р и м е р 3. Пусть $g(\mathbf{x})$ — произвольная вещественная измеримая функция с $|g(\mathbf{x})| \leqslant 1$ $\forall x \in R^3$. Рассмотрим

$$V_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{n} 2^{-n} W_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{q}_n) + \beta \cdot g(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x}|^{-2},$$

$$\text{где } W_\alpha(\mathbf{y}) = \begin{cases} |y|^{-2+\alpha}, & |\mathbf{y}| < 1, \quad \alpha \in (0, 2), \quad \beta > \frac{-1}{2m}. \\ 0, & |\mathbf{y}| \geqslant 1 \end{cases}$$

Так как $\|u / |\mathbf{x}|\| \leqslant a\|(-\Delta)^{1/2}u\| + b\|u\|$, $a \leqslant 2$, $\forall u \in \mathscr{H}_\Delta$ и $\| | \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} W_\alpha(\cdot, -q_n) |^{1/2} u\| \leqslant \varepsilon \|(-\Delta)^{1/2}u\| + b'\|u\|$ $\forall \varepsilon > 0$, $u \in \mathscr{H}_\Delta$, то оператор $|V_\alpha|^{1/2}$ $H_0^{1/2}$-ограничен.

Таким образом, следствие из теорем 1 и 2 применимо к рассматриваемому потенциалу.

Автор выражает благодарность В. П. Гачку за постановку задачи и внимание к работе.

Институт теоретической физики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
30 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. K a t o, Perturbation Theory for Linear Operators, Grundleheren, 132, Berlin, 1966. [2] B. S i m o n, Doctor Dissertation, Princeton University, 1970. [3] E. N e l s o n, J. Math. Phys., 5, 332 (1964). [4] А. В. С к о р о х о д, Теория вероятностей и ее применения, 1, 261, (1956). [5] H. F. T r o t t e r, Proc. Am. Math. Soc., 10, 545 (1959). [6] W. G. F a r i s, Pacif. J. Math., 22, 47 (1967).