

УДК 513.6

МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР В. П. ПЛАТОНОВ, В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

СТРУКТУРА УНИТАРНЫХ ГРУПП И КОММУТАНТ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ НАД ГЛОБАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

Пусть V — n -мерное линейное пространство (правое) над конечномерным телом D . Φ — невырожденная косоэрмитова форма на $V \times V$ относительно некоторого инволютивного антиавтоморфизма $j: d \rightarrow \bar{d}$ тела D . $S = \{d \in D \mid \bar{d} = d\}$ — подмножество симметричных элементов D . Если K — центр D , то $\dim_K D = m^2$ и предполагаем, что $k = K \cap S \neq K$, т. е. j — инволюция второго рода. В случае $\text{char } K = 2$, как обычно, считаем, что

$$\forall v \in V \quad \exists \lambda(v) \in D: \Phi(v, v) = \lambda(v) - \overline{\lambda(v)}.$$

$U(\Phi)$ — унитарная группа формы Φ ; $TU(\Phi)$ — подгруппа $U(\Phi)$, порожденная трансвекциями. $GL(n, D)$ — полная линейная группа над D , $SL(n, D)$ — подгруппа элементов с приведенной нормой (см. (1, 2)), равной единице. $SU(\Phi) = SL(n, D) \cap U(\Phi)$.

В дальнейшем предположим, что $\text{index } \Phi > 0$.

Известная гипотеза о группах $SL(n, D)$ и $SU(\Phi)$, содержащаяся в общей гипотезе Кнезера — Титса об односвязных алгебраических группах (см. (3, 4)), состоит в следующем: группы $SL(n, D)$, $n > 1$, и $SU(\Phi)$ порождаются трансвекциями или, что эквивалентно, факторы этих групп по центру являются простыми абстрактными группами. Нетрудно показать (см. (5)), что гипотеза для $SL(n, D)$ эквивалентна утверждению: коммутант $GL(1, D)$ совпадает с $SL(1, D)$. В такой форме эту гипотезу высказали Артин и Таннака еще в 1943 г. (см. (5, 6)). Ниже мы увидим, что для $SU(\Phi)$ также все сводится к некоторой гипотезе о структуре тела D с инволюцией.

Отметим, что в настоящее время гипотеза о $SL(n, D)$ доказана для p -адических полей (6) и алгебраических числовых полей (5), а гипотеза для $SU(\Phi)$ — только для p -адических полей (7).

Цель этой статьи — доказательство гипотезы для любых глобальных полей. Основной является следующая теорема.

Теорема 1. *Над глобальным полем K группа $SU(\Phi) = TU(\Phi)$, т. е. порождается трансвекциями, и является коммутантом группы $U(\Phi)$.*

Предлагаемое ниже доказательство теоремы 1 существенно зависит от доказательств гипотезы для $SL(n, D)$. В частности, необходимо доказать гипотезу о $SL(n, D)$ для функционального глобального поля. Незначительная модификация рассуждений Ванга (5, 7) с использованием теории полей классов для функциональных полей (9) позволяет доказать вполне аналогичным, но столь же длинным и сложным путем следующую теорему.

Теорема 2. *Если K — глобальное функциональное поле, то коммутант $[GL(n, D), GL(n, D)] = SL(n, D)$.*

Замечание 1. В последнее время первому из авторов удалось найти новый подход к гипотезе Артина, основанный на алгебро-геометрических соображениях и не использующий арифметики поля K . Представляется весьма вероятным, что новый метод позволит получить доказательство гипотезы Артина в общем случае.

Пусть $\Sigma(D)$ — подгруппа мультипликативной группы D^* тела D с инволюцией j , порожденная $(S \setminus \{0\})$, т. е. подмножеством ненулевых симметричных элементов. N_{red} — приведенная норма в D над K . $\Sigma'(D) = N_{\text{red}}^{-1}(k^*)$. Нетрудно показать, что $\Sigma(D) \subset \Sigma'(D)$.

Предложение 1. Для произвольного поля K и любых $a, b \in D^*$ коммутатор $[a, b] \in S^5$, в частности, $[D^*, D^*] \subset \Sigma(D)$.

Доказательство. Если $b \in S$, то $aba^{-1}b^{-1} = (ab\bar{a})(\bar{a}^{-1}a^{-1})b \in S^3$. Аналогично для $a \in S$. Поэтому можно считать, что $a, b \notin S$. Так как $\dim_K D = m^2$, то $\dim_h D = 2m^2$, $\dim_h S = m^2$. Рассмотрим линейное пространство $(S + \lambda a) = \{s + \lambda a \mid s \in S, \lambda \in k\}$. Если $x \in D^*$, то $\dim_h(xS) = m^2$, $\dim_h(S + \lambda a) = m^2 + 1$. Значит, $(xS) \cap (S + \lambda a) \neq \emptyset$, т. е. $x \in (S + \lambda a)S$, ибо $(S \setminus \{0\})^{-1} = (S \setminus \{0\})$. Следовательно, $b = s_1(s_2 + \lambda a)$, где $s_1, s_2 \in S$.

$$\begin{aligned} aba^{-1}b^{-1} &= as_1(s_2 + \lambda a)a^{-1}(s_2 + \lambda a)^{-1}s_1^{-1} = \\ &= as_1s_2(1 + \lambda s_2^{-1}a)a^{-1}[(1 + \lambda as_2^{-1})s_2]^{-1}s_1^{-1} = \\ &= as_1s_2a^{-1}a(1 + \lambda s_2^{-1}a)a^{-1}s_2^{-1}(1 + \lambda as_1^{-1})^{-1}s_1^{-1} = \\ &= as_1s_2a^{-1}(1 + \lambda as_2^{-1})s_2^{-1}(1 + \lambda as_2^{-1})^{-1}s_1^{-1} = \\ &= as_1\bar{a}\bar{a}^{-1}s_2a^{-1}(1 + \lambda as_2^{-1})s_2^{-1}\overline{(1 + \lambda as_2^{-1})}(1 + \lambda as_2^{-1})^{-1}(1 + \lambda as_2^{-1})s_1^{-1} = \\ &= (as_1\bar{a})(\bar{a}^{-1}s_2a^{-1})[(1 + \lambda as_2^{-1})s_2^{-1}(1 + \lambda as_1^{-1})]^{-1}[(1 + \lambda as_2^{-1})(1 + \lambda as_2^{-1})]^{-1}s_1^{-1} \in S^3. \end{aligned}$$

Предложение 1 доказано.

Замечание 2. Аналогичное доказательство включения $[D^*, D^*] \subset \Sigma(D)$ независимо получено Л. Н. Васерштейном (неопубликовано). По-видимому, утверждение $[a, b] \in S^5$ можно усилить; не исключено, что $[a, b] \in S^3$.

Из предложения 1 и результатов ⁽¹⁰⁾ непосредственно следует

Предложение 2. Фактор-группа $U(\Phi) / TU(\Phi) \cong D^* / \Sigma(D)$.

Этот изоморфизм получается естественным образом с помощью отображения спинорной нормы N_{Spin} (см. ⁽¹⁰⁾). Оказывается, $N_{\text{Spin}}(U(\Phi)) = D^*$, а $N_{\text{Spin}}(TU(\Phi)) = \Sigma(D)$. Усовершенствуя эти рассуждения из ⁽¹⁰⁾, можно доказать

Предложение 3. $N_{\text{Spin}}(SU(\Phi)) = \Sigma'(D)$, значит,

$$SU(\Phi) / TU(\Phi) \cong \Sigma'(D) / \Sigma(D).$$

Таким образом, из предложения 2 следует, что для произвольных полей

$$SU(\Phi) = TU(\Phi) \Leftrightarrow \Sigma'(D) = \Sigma(D).$$

Предложение 4. Пусть для всякого нечетномерного тела D с инволюцией над полем K справедлива гипотеза Артина: $SL(1, D) = [D^*, D^*]$. Если $D = D(2) \times D(p_1) \times \dots \times D(p_r)$ — разложение D в прямое произведение тел примарных взаимно простых степеней, то $\Sigma'(D) = \Sigma(D) \Leftrightarrow \Sigma'(D(2)) = \Sigma(D(2))$, в частности, если D — тело нечетной степени, то $\Sigma'(D) = \Sigma(D)$.

Доказательство. Ограничимся доказательством последнего равенства, к которому естественно сводится общий случай, если рассмотреть инволюции, индуцируемые j на прямых сомножителях, и использовать соответствующие разложения для $\Sigma(D)$ и $\Sigma'(D)$ (см. ⁽¹¹⁾, гл. 10). Итак, пусть степень m тела D нечетна. Для всякого $a \in \Sigma'(D)$ приведенная норма $N_{\text{red}}(a) = c \in k$. Тогда $N_{\text{red}}(a^m c^{-1}) = c^m c^{-m} = 1$, значит, $a^m c^{-1} \in SL(1, D) = [D^*, D^*]$. Из предложения 1 следует, что $a^m \in \Sigma(D)$. Далее, $N_{\text{red}}(a) = N_{\text{red}}(\bar{a})$, поэтому $a = \bar{a}\omega$, где $\omega \in SL(1, D)$, $a^2 = \bar{a}\bar{a}\omega \in$

$\in \Sigma(D)SL(1, D) = \Sigma(D)$. Так как $(2, m) = 1$, то $a \in \Sigma(D)$, т. е. $\Sigma'(D) = \Sigma(D)$.

Основная лемма. Пусть D — тело с инволюцией j над глобальным полем K . Для всякого $a \in (N_{\text{red}}(D) \cap k^*)$ существует такой элемент $x_a \in D$, что $K[x_a]$ — максимальное коммутативное подтело D , определенное над k , и $N_{K[x_a]:K}(x_a) = a$.

Доказательство. Для всякого нормирования v поля K через K_v будем обозначать пополнение поля K . Пусть $v_1, v_2, \dots, v_r$ — все нормирования поля K , относительно которых тело D разветвлено. Заметим, что $K_{v_i} = k_{v_i}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Действительно, если v_i — архимедово нормирование, тогда K_{v_i} — поле вещественных чисел и $K_{v_i} = k_{v_i}$; для неархимедова нормирования v_i это следует из того факта, что над K_{v_i} нет тел с инволюциями второго рода (см. ⁽¹⁾, гл. 10).

Докажем, что для всякого неархимедова v_i существует неприводимый многочлен $f(x) \in k_{v_i}[x]$ степени m со свободным членом $(-1)^m a$.

Нетрудно видеть, что можно ограничиться случаем, когда a — целый элемент в k_{v_i} . Если t_i — униформизирующий параметр k_{v_i} , то $a = \varepsilon_i t_i^\alpha$, $\alpha \geq 0$, где ε_i — единица кольца целых элементов. Пусть сначала $\alpha = 0$. Тогда редукция по модулю (t_i) сводит доказательство к случаю конечного поля. Для конечного поля наше утверждение доказывается индукцией по m с учетом цикличности конечных расширений и транзитивности нормы.

Отметим, что получаемое таким образом расширение поля k_{v_i} будет неразветвленным.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда $\alpha \leq m$. Если $d = (\alpha, m)$, $\alpha = a_0 d$, то существует k_{v_i} -неприводимый многочлен $f_0(z) \in k[z]$ степени d со свободным членом $(-1)^d a$. Действительно, все сводится к случаю $\alpha = 0$. Пусть z_i — корень $f_0(z)$, тогда $k_{v_i}[z_i]$ — неразветвленное расширение степени d и $N_{k_{v_i}[z_i]:k_{v_i}}(z_i) = a$. Нетрудно видеть, что $z_i = \varepsilon_i t_i^{\alpha/d}$. Тогда непосредственно проверяется, что многочлен $\varphi_0(x) = x^{m/d} + z_i x + (-1)^{m/d} z_i$ неприводим над $k_{v_i}[z_i]$ и его корень $x_a^{(i)}$ обладает свойством $N_{k_{v_i}[z_i, x_a^{(i)}]:k_{v_i}}(x_a^{(i)}) = a$. Остается за-

метить, что, по построению (если учесть вид многочлена $\varphi_0(x)$), $[k_{v_i}[x_a^{(i)}]:k_{v_i}] = m$. Следовательно, $x_a^{(i)}$ является корнем неприводимого многочлена $f_i(x)$ степени m со свободным членом $(-1)^m a$.

В случае, если v_i — архимедово нормирование, положим $f_i(x) = x^m + a$. В архимедовом случае m должно быть четным числом и $k_{v_i}[x_a^{(i)}]$ — поле комплексных чисел, так как $a > 0$, ибо является приведенной нормой (см. ⁽²⁾, гл. 10). По аппроксимационной теореме, примененной к нормированиям $v_1, v_2, \dots, v_r$ и коэффициентам многочленов $f_i(x)$, существует многочлен $f(x) \in k[x]$ степени m со свободным членом $(-1)^m a$, сколь угодно близкий к $f_i(x)$ для всех нормирований $v_1, v_2, \dots, v_r$. По лемме Краснера, для неархимедовых $v_i f(x)$ будет неприводим над k_{v_i} . Пусть x_a — корень многочлена $f(x)$. Тогда $K[x_a]$ изоморфно максимальному коммутативному подтелу D . Действительно, для всякого неархимедова v_i степень $[K_{v_i}[x_a]:K_{v_i}] = m$, а для архимедова $[K_{v_i}[x_a]:K_{v_i}] = 2$. Значит, $K_{v_i}[x_a] = (K[x_a])_{v_i}$ является полем разложения для $D \otimes K_{v_i}$. Так как для всех $v \neq v_i$ D неразветвлено, то $D \otimes_K K[x_a]$ неразветвлена во всех v . Следовательно (см. ⁽²⁾, гл. 10), $K[x_a]$ — поле разложения для D и, ввиду $[K[x_a]:K] = m$, $K[x_a]$ есть максимальное коммутативное подтело D . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\sigma' \in \Sigma'(D)$. $N_{\text{red}}(\sigma') = a$. Пусть x_a — элемент, построенный в основной лемме. Тогда $N_{\text{red}}(\sigma' x_a^{-1}) = 1$. Так как минимальный многочлен x_a лежит в $k[x]$, то $\bar{x}_a = g x_a g^{-1}$, $g \in D^*$. Если $\bar{g} \neq -g$, то $\bar{x}_a(g + \bar{g}) = (g + \bar{g})x_a \in \Sigma(D)$, значит, $x_a \in \Sigma(D)$. Если

$\bar{g} = -g$, то $gx_a = -gx_a$ и $x_a = g^{-1}(gx_a)$. Существует кососимметричный элемент $\alpha \in K$. Тогда $x_a = (\alpha^{-1}g^{-1})(\alpha gx_a) \in \Sigma(D)$. Теорема 1 теперь непосредственно следует из теоремы Ванга, теоремы 2 и предложений 1, 3.

Институт математики
Академии наук БССР

Поступило
5 IX 1972

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Бурбаки, Алгебра: модули, кольца, формы, М., 1966. ² А. Вейль. Основы теории чисел, М., 1972. ³ J. Tits, Ann. Math., 80, № 2, 313 (1964). ⁴ В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 2, 1211 (1969). ⁵ S. Wang, Am. J. Math., 72, № 2, 323 (1950). ⁶ T. Nakayama, Y. Matsushima, Proc. Imper. Acad. Japan, 19, 21 (1943). ⁷ J. Dieudonne, Sur les groupes classiques, Paris, 1948. ⁸ S. Wang, Ann. Math., 51, № 2, 124 (1950). ⁹ E. Artin, J. Tate, Class Field Theory, Harvard, 1961. ¹⁰ G. Wall, Publ. Math. I.H.E.S., № 1, 5 (1959). ¹¹ A. Albert, Structure of Algebras, N. Y., 1939.