

Н. С. НИКОЛЬСКАЯ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ
ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ В МЕТРИКЕ L_p

(Представлено академиком В. С. Владимировым 3 V 1972)

Результаты этой статьи связаны с исследованиями, начатыми в работах К. И. Бабенко ⁽¹⁾ и получившими развитие в работах Б. С. Митягина ⁽²⁾, С. А. Теляковского ^(7, 8), Я. С. Бугрова ⁽³⁾ и др.

Мы рассматриваем периодические, периода 2π , по каждой переменной x_j функции

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in L_p^*, \quad 1 < p < \infty,$$

с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Delta} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \Delta = \{0 \leq x_j \leq 2\pi; j = 1, \dots, n\}.$$

Ряд Фурье для f будем записывать двумя способами:

$$f(x) = \sum_k c_k e^{ikx} = \sum_s \delta_s(x), \quad kx = \sum_1^n k_j x_j, \quad (1)$$

где функции $\delta_s(x) = \delta_s(f, x)$, соответствующие различным целочисленным векторам s , определяются ниже.

Для каждого целого числа v введем множества α^v целых чисел m , определенных следующим образом: α^0 состоит только из одного числа 0, α^v при $v \neq 0$ состоит из всех целых чисел m того же знака, что и v , для которых выполняются неравенства $2^{|v|-1} \leq |m| < 2^{|v|}$.

Далее, для каждого целочисленного вектора $s = (s_1, \dots, s_n)$ вводим множество $\alpha_s = \alpha^{s_1} \times \alpha^{s_2} \times \dots \times \alpha^{s_n}$ целочисленных векторов $k = (k_1, \dots, k_n)$, т. е. $k \in \alpha_s$, если $k_j \in \alpha^{s_j}$, $j = 1, \dots, n$. Полагаем

$$\delta_s(x) = \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \alpha_s} c_k e^{ikx}.$$

Согласно теоремам Литтлвуда и Пэли (см. ⁽⁴⁾, гл. XV), обобщенным на n переменных, справедливы неравенства

$$C_1 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum |\delta_s(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

где C_1 и C_2 — не зависящие от f положительные константы.

Мы рассматриваем (принадлежащие к L_p^*) производные порядка $l > 0$ от f , ряды Фурье которых определяются равенствами

$$f^{(l)}(x) \sim \sum c_k (ik)^l e^{ikx},$$

$$(ik)^l = (ik_1)^{l_1} \dots (ik_n)^{l_n}, \quad (it)^a = |t|^a \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} a \operatorname{sign} t \right\}.$$

Пусть $r = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j > 0$, — вектор, e — произвольное подмножество конечного множества $e^n = \{1, \dots, n\}$ натуральных чисел и $r^e = (r_1^e, \dots, r_n^e)$ — вектор, определяемый равенствами

$$r_j^e = \begin{cases} r_j, & j \in e, \\ 0, & j \in e^n - e. \end{cases}$$

Через SL_p^* обозначим класс функций f , для которых имеет смысл конечная норма

$$\|f\|_r = \sum_{e \in e^n} \|f^{(r^e)}\|_p, \quad (2)$$

где сумма распространена на все подмножества $e \subset e^n$ (в том числе и пустое, и тогда $f^{(r^e)} = f$).

Пользуясь методом множителей Марцинкевича, мы доказываем, что норма (2) эквивалентна следующей норме (см. (1)):

$$\|f\|_{SL_p^*}^r = \left\| \left(\sum_s \left| 2^{\sum_{j=1}^n |s_j| r_j} \delta_s(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \quad (3)$$

Мы рассматриваем еще класс SH_p^* периодических функций, определяемых ниже (см. (6)).

Обозначим через

$$\Delta_{j\lambda} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \lambda, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n),$$

$$\Delta_{j\lambda}^2 f(x) = \Delta_{j\lambda} \Delta_{j\lambda} f(x)$$

соответственно первую и вторую разности от функции f в точке x с шагом λ по переменной x_j . Если теперь $e = \{j_1, \dots, j_m\} \subset e^n$ — указанное выше подмножество натуральных чисел, то для любого вектора $h = (h_1, \dots, h_n)$, имеющего носитель e^n , т. е. такого, что все $h_j \neq 0$, определяем еще векторы $h^e = (h_1^e, \dots, h_n^e)$, как выше определялись векторы r^e по r . Вообще через h^e будем обозначать вектор с носителем e .

Вводим еще кратные разности первого и второго порядка:

$$\Delta_{h^e} f(x) = \Delta_{j_1 h_{j_1}^e} \dots \Delta_{j_m h_{j_m}^e} f(x),$$

$$\Delta_{h^e}^2 f(x) = \Delta_{j_1 h_{j_1}^e}^2 \dots \Delta_{j_m h_{j_m}^e}^2 f(x).$$

Пусть $\bar{r}_j$ есть наибольшее целое число, меньшее, чем r_j . Таким образом, $r_j = \bar{r}_j + \beta_j$, где $0 < \beta_j \leq 1$ и $\bar{r}_j$ целое. Полагаем далее $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

По определению, функция $f \in SH_p^*$, если она периода 2π по каждой из переменных x_j и если существует неотрицательная константа M такая, что

$$\|\Delta_{h^e}^2 f^{(\bar{r}^e)}(x)\|_p \leq M, \quad (4)$$

каково бы ни было e и векторы h^e . Здесь

$$|h^e|^{\beta^e} = \prod_{j \in e} |h_j|^{\beta_j}.$$

Для пустого множества e левая часть (4) понимается как $\|f\|_p$. Наименьшая константа M , для которой выполняется неравенство (4) для всех h^e , по определению, есть норма $M_f = \|f\|_{SH_p^*}^r$.

Мы доказываем, что если $f \in SH_p^*$, то (см. (1))

$$\|\delta_s(x)\|_p \leq M' 2^{-\sum_{j=1}^n |s_j| r_j}, \quad M' \leq C M_f, \quad (5)$$

где C не зависит от s и f . Обратное, как известно, тоже верно (см. (6), а для нецелых r_j также (2)); учесть, что $\delta_s(x)$ — тригонометрические полиномы: из неравенства (5), где M' не зависит от целочисленных векторов s , следует, что $f \in SH_p^*$ и $M_f \leq C' M'$, где C' не зависит от M' . Таким образом,

наименьшая константа $M' = M'_f$, для которой выполняется неравенство (5) для всех s , может служить другой эквивалентной нормой $f \in SH_p^r$.

Из сказанного следует, что $SL_p^r \subset SH_p^r$ и $\|f\|_{SH_p^r} \leq C \|f\|_{SL_p^r}$, где C не зависит от f .

Если ε — множество целочисленных векторов k (частот k), то условимся обозначать через $|\varepsilon|$ их число, а через

$$S_\varepsilon(x) = S_\varepsilon(f, x) = \sum_{k \in \varepsilon} c_k e^{ikx}$$

— сумму Фурье f , распространенную на $k \in \varepsilon$.

Будем писать $\mu(N) \sim \nu(N)$, $N \geq N_0$, если $C_1 \mu(N) < \nu(N) < C_2 \mu(N)$ и C_1, C_2 — не зависящие от $N \geq N_0$ константы.

Положим

$$\varepsilon_N^* = \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \alpha_s, \quad \sigma_N(x) = \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \delta_s(x) = \sum_{k \in \varepsilon_N^*} c_k e^{ikx}.$$

Если $0 < r_1 = \dots = r_m < r_{m+1} \leq \dots \leq r_n$, то справедливы соотношения

$$|\varepsilon_N^*| = \Lambda \sim N^{m-1} 2^{N/r_1}, \quad (\Lambda / \lg^{m-1} \Lambda)^{r_1} \sim 2^N, \quad N > 1.$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть $0 < r_1 = \dots = r_m < r_{m+1} \leq \dots \leq r_n$, $1 < p < \infty$. Существуют не зависящие от $f \in SL_p^r$ константы C_0 и μ_0 со следующими свойствами: каждому $\mu > \mu_0$ можно привести в соответствие множество ε_μ частот k , так что $|\varepsilon_\mu| \sim \mu$ и

$$\|f(x) - S_{\varepsilon_\mu}(f, x)\|_p \leq C_0 (\lg^{m-1} \mu / \mu)^{r_1} \|f\|_{SL_p^r} \quad (6)$$

для любых $f \in SL^*$. При этом множитель в скобках в правой части нельзя заменить на $o(\lg^{m-1} \mu / \mu)^{r_1}$, $\mu \rightarrow \infty$.

Неравенство (6) в смысле порядка достигается для

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon_N^* = \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \alpha_s, \quad S_{\varepsilon_\mu}(f, x) = \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \delta_s(x), \quad (7)$$

где N есть решение уравнения $\mu = N^{m-1} 2^{N/r_1}$.

Отметим, что Б. С. Митягин ⁽⁵⁾ среди других классов рассмотрел класс функций периода 2π , имеющих производную $f^{(r)} \in L_p^*$, $1 < p < \infty$. Если ограничиться только теми функциями f этого класса, у которых $c_k = 0$ (см. (1)) для всех $k = (k_1, \dots, k_n)$, имеющих хотя бы одну компоненту k_j , равную нулю, то все они принадлежат к SL_p^r , $f \in SL_p^r$. Для таких функций, как это непосредственно следует из результатов Б. С. Митягина, имеет место неулучшаемая оценка (6), где под $S_{\varepsilon_\mu}(f, x)$ понимаются суммы вида

$$S_{\varepsilon_\mu}(f, x) = \sum_{k \in \varepsilon_\mu} \lambda_k c_k e^{ikx}$$

с коэффициентами λ_k , зависящими от ε_μ (не все они равны 1).

Теорема 2. Для величины

$$E_N(SH_p^r) = \sup_{\substack{r \leq 1 \\ SH_p^r}} \|f(x) - \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \delta_s(f, x)\|_p \quad (8)$$

имеют место оценки $(0 < r_1 = \dots = r_m < r_{m+1} \leq \dots \leq r_n)$

$$E_N(SH_p^r) \sim \begin{cases} N^{(n-1)/p} \cdot 2^{-N} \sim (\lg \Lambda)^{(m-1)r_1 + (n-1)/p} / \Lambda^{r_1}, & 1 < p \leq 2 \\ N^{(n-1)/2} \cdot 2^{-N} \sim (\lg \Lambda)^{(m-1)r_1 + (n-1)/2} / \Lambda^{r_1}, & 2 \leq p < \infty. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\Lambda \sim N^{m-1} 2^{N/r_1}$ — количество гармоник k , входящих в сумму

$$\sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \delta_s(x) = \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} \sum_{k \in \alpha_s} c_k e^{ikx}. \quad (10)$$

Эта оценка при $p=2$ получена Я. С. Бугровым⁽³⁾.

При $r=r_1=\dots=r_n>0$ мы доказываем, что правые части (10) не обращаются соответственно в $o(N^{(n-1)/p} 2^{-N})$, $o(N^{(n-1)/2} 2^{-N})$, $N \rightarrow \infty$, если заменить в (9) и (10) сумму (6) на любую другую сумму

$\sum_{s \in \Omega(N)} \delta_s(x)$ такую, что

$$\sum_{s \in \Omega(N)} |\alpha_s| \sim \sum_{\substack{n \\ \sum_1^n r_j |s_j| < N}} |\alpha_s|, \quad N > 1.$$

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность Я. С. Бугрову за внимание к работе и ценные советы.

Московский институт электронной
техники

Поступило
17 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. И. Бабенко, ДАН, 132, № 2, 247 (1960); 132, № 5, 982 (1960). ² Н. С. Бахвалов, Вестн. Московск. ун-в., Математ., механ., № 3, 7 (1963). ³ Я. С. Бугров, Математ. сборн., 64 (106); 3, 410 (1964). ⁴ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., 2, 1 (1965). ⁵ Б. С. Митягин, Матем. сборн., 58, 397 (1962). ⁶ С. М. Никольский, ДАН, 150, 484 (1963). ⁷ С. А. Теляковский, Сибирск. матем. журн., 4, 6, 1404 (1963). ⁸ С. А. Теляковский, Матем. сборн., 63 (105), 3, 426 (1964).