Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

А. В. ПОКРОВСКИЙ

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ ВИБРОУСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 V 1972)

1. В работах М. А. Красносельского и автора ([1], [2]) начато исследование специального класса дифференциальных уравнений — виброустойчивых дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают, например, при анализе различных феноменологических моделей пластических тел ([3-5]). Эта статья является продолжением работ ([1], [2]).

Пусть вектор-функции $\varphi(t, x, u)$ и $\psi(t, x, u)$ со значениями в R^n определены и непрерывны при $x \in R^n$, $-\infty < t$, $u < \infty$. Тогда каждой непрерывно дифференцируемой функции $u(t)$ (управлению $u(t)$) соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dx / dt = \varphi[t, x, u(t)]\ u'(t) + \psi[t, x, u(t)]. \qquad (1)$$

В ([1]) введено понятие обобщенного решения уравнения (1), отвечающего любому непрерывному (не обладающему какими-либо свойствами гладкости) управлению $u(t)$. Следуя ([1]), будем говорить, что уравнение (1) виброустойчиво вправо, если каждому непрерывному управлению $u(t)$ и каждому начальному условию $x(t_0) = x_0$ отвечает обобщенное решение этого уравнения, определенное в некоторой правой окрестности точки t_0. Аналогично определяется виброустойчивость уравнения (1) влево. Уравнение (1) называется виброустойчивым, если оно виброустойчиво как вправо, так и влево. В ([1]) показано, что виброустойчивость уравнения (1) гарантируется достаточной гладкостью функций $\varphi(t, x, u)$ и $\psi(t, x, u)$. Напомним ([1]), что два обобщенных решения виброустойчивого дифференциального уравнения, удовлетворяющие одному и тому же начальному условию, принимают одинаковые значения на общей части своих областей определения. Поэтому можно говорить (см. ([6])) о продолжениях (влево, вправо или двусторонних) обобщенных решений и о непродолжимых решениях.

Как известно, решения обыкновенного дифференциального уравнения нелокально продолжимы, если они «не уходят за конечное время в бесконечность». Иначе говоря, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений решение нелокально продолжимо, если оно ограничено на каждом конечном интервале изменения времени t.

Как оказывается, для обобщенных решений аналогичная теорема в общем случае неверна. В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$dx / dt = \varphi(t) u'(t), \qquad (2)$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sqrt{|t|}\cos(1/t) & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Это уравнение виброустойчиво вправо. Пусть $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — решения уравнения (2) при управлениях

$$u_k(t) = \begin{cases} (-1)^n \sqrt{|t|}\sin(1/t) & \text{при } t_{n-1} < 1 \leqslant t_n, \\ 0 & \text{при } t \geqslant 0, \end{cases}$$

где $t_{-1}=-\infty$ и $t_n=-1/(\pi k^n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, отвечающие начальному условию $x_k(-1/\pi)=x_0$. Тогда при достаточно больших k решение $x_k(t)$ определено и ограничено на промежутке $[-1/\pi, 0)$, но является непродолжимым вправо обобщенным решением уравнения (2).

Однако такая ситуация возможна только при негладких функциях $\varphi(t, x, u)$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *виброустойчиво. Пусть функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывно дифференцируема по переменным* t *и* x.

Тогда обобщенное решение уравнения (1), *ограниченное на каждой конечной части своей области определения, нелокально продолжимо.*

Мы не останавливаемся на формулировке аналогичных теорем, относящихся к уравнениям виброустойчивым вправо или влево.

2. Наиболее известным признаком нелокальной продолжимости решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$dx/dt=L(t, x)$$

является условие

$$\int^{\infty}\frac{dz}{M(z;T)}=\infty,\quad T\geqslant 0,$$

где $M(z;T)=\sup\limits_{|y|\leqslant z,\ |t|\leqslant T}|L(t, y)|$.

Этот признак (см., например, [1]) допускает обобщение и на виброустойчивые дифференциальные уравнения (1).

По тройке чисел t_0, u_0, δ построим функции

$$\alpha(t_0, u_0, z, \delta)=\sup_{\substack{|t-t_0|,\ |u-u_0|\leqslant\delta\\ |y|\leqslant z}}|\varphi_t'(t, u, y)|,$$

$$\beta(t_0, u_0, z, \delta)=\sup_{\substack{|t-t_0|,\ |u-u_0|\leqslant\delta,\\ |y|\leqslant z}}|\varphi_x'(t, u, y)|,$$

$$\gamma(t_0, u_0, z, \delta)=\sup_{\substack{|t-t_0|,\ |u-u_0|\leqslant\delta,\\ |y|\leqslant z}}|\psi(t, u, y)|.$$

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *виброустойчиво. Пусть функция* $\varphi(t, u, x)$ *непрерывно дифференцируема по переменным* t *и* x *и удовлетворяет оценке*

$$|\varphi(t, x, u)|\leqslant a(t, u)|x|+b(t, u),\tag{3}$$

где $a(t, u)$ *и* $b(t, u)$ — *некоторые непрерывные скалярные функции. Пусть, наконец, каждой паре* $\{t_0, u_0\}$ *отвечает такое* $\delta>0$, *что функции*

$$p(z)=\alpha(t_0, u_0, z, \delta)\exp[\delta\beta(t_0, u_0, z,\delta)],\tag{4}$$
$$q(z)=\gamma(t_0, u_0, z, \delta)\exp[\delta\beta(t_0, u_0, z, \delta)]$$

удовлетворяют условиям

$$\int^{\infty}\frac{dz}{p(z)}=\infty,\quad \int^{\infty}\frac{dz}{q(z)}=\infty.$$

Тогда все обобщенные решения уравнения (1) *нелокально продолжимы.*

Приведем одно более обозримое следствие из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *виброустойчиво. Пусть функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывно дифференцируема по переменным* t *и* x *и удовлетворяет оценке* (3). *Пусть, наконец, для каждого* $\Delta>0$ *функция*

$$\beta(z)=\sup_{|t|,\ |u|\leqslant\Delta;\ |y|\leqslant z}|\varphi_x'(t, y, u)|$$

ограничена, а функции

$$\alpha(z) = \sup_{|t|,\ |u|\leqslant\Delta;\ |y|\leqslant z} |\varphi_t'(t, y, u)|, \quad \gamma(z) = \sup_{|t|,\ |u|\leqslant\Delta;\ |y|\leqslant z} |\psi(t, y, u)|$$

удовлетворяют условиям

$$\int^{\infty} \frac{dx}{\alpha(x)} = \infty, \quad \int^{\infty} \frac{dx}{\gamma(x)} = \infty.$$

Тогда обобщенные решения уравнения (1) *нелокально продолжимы.*

3. Можно указать и признаки односторонней продолжимости решений, в которых на правую часть уравнения накладываются лишь односторонние оценки.

Теорема 4. *Пусть скалярное уравнение* (1) *виброустойчиво вправо. Пусть функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывно дифференцируема по переменным* t *и* x, *а функция*

$$M(x; a) = \sup_{|t|,\ |u|\leqslant a;\ |y|\leqslant x} |\varphi(t, y, u)|$$

удовлетворяет при любом фиксированном $a > 0$ *условию*

$$\int^{\infty} \frac{dx}{M(x; a)} = \infty.$$

Пусть, наконец, существуют такие непрерывные функции $\xi(t, u)$ *и* $\eta(t, u)$, $\xi(t, u) \leqslant \eta(t, u)$, *что функция* $\psi(t, x, u)$ *неположительна при* $x \geqslant \eta(t, u)$ *и неотрицательна при* $x \leqslant \xi(t, u)$, *а функция* $\varphi_t'(t, x, u)$ *не меняет знака в каждой из областей* $x \geqslant \eta(t, u)$ *и* $x \leqslant \xi(t, u)$.

Тогда обобщенные решения уравнения (1) *нелокально продолжимы вправо.*

Как показывают примеры, условие знакопостоянства функции $\varphi_t'(t, x, u)$ не может быть заменено какими-либо оценками по модулю, например равномерной ограниченностью этой функции. Теорема 4 может быть перенесена на векторный случай (однако при этом существенно усложняются формулировки).

4. Второй вопрос, обсуждаемый в настоящей статье,— это вопрос об индивидуальной виброустойчивости управлений $u(t)$.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$dx / dt = f[t, x, u(t), u'(t)]. \tag{5}$$

Функция $f(t, x, u, v)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных $-\infty < t, x, u, v < \infty$. Для решения $x(t)$ уравнения (5), удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$ и отвечающего гладкому управлению $u(t)$, будем употреблять обозначение $x(t) = W[t_0, x_0]u(t)$. Назовем пару $\{t_0, x_0\}$ точкой виброустойчивости непрерывного управления $u(t)$, если для каждой последовательности непрерывно дифференцируемых управлений $u_n(t)$, равномерно сходящейся к $u(t)$ на промежутке $[t_0, t_1]$, последовательность функций $x_n(t) = W[t_0, x_0]u_n(t)$ равномерно сходится на некотором промежутке $[t_0, t_2]$, $t_0 < t_2 \leqslant t_1$. Другими словами, виброустойчивость управления $u(t)$ в точке $\{t_0, x_0\}$ означает, что уравнение (5) имеет обобщенное решение, отвечающее управлению $u(t)$ и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Один из основных результатов статьи [1] гласит, что необходимым условием виброустойчивости управления — константы $u_0(t) \equiv u_0$ в некоторой точке $\{t_0, x_0\}$ является равенство

$$f(t_0, x_0, u_0, v) \equiv av + b. \tag{6}$$

Именно по этой причине в предыдущих пунктах рассматривались уравнения (1), а не общие уравнения (5).

В связи с изложенным выше возник вопрос об описании дифференциальных уравнений, правые части которых не удовлетворяют равенству (6), но для которых существуют управления $u(t)$, виброустойчивые в некоторой точке $\{t_0, x_0\}$. Один из классов таких уравнений удалось обнаружить.

Рассмотрим уравнение

$$dx / dt = g(x) \, |u'(t)| + h[t, x, u(t), u'(t)], \tag{7}$$

в котором $h(t, x, u, v)$ — любая равномерно ограниченная функция, а функция $g(x)$ строго убывает, $g(0) = 0$ и $[g(x)]^{-1}$ суммируема на $(-\infty, \infty)$.

Обозначим через Γ класс непрерывных управлений, имеющих бесконечную вариацию на каждом промежутке.

Теорема 5. *Пара* $\{0, 0\}$ *является точкой виброустойчивости любого управления* $u(t) \in \Gamma$ *для уравнения* (7).

5. Достаточная гладкость функций $\varphi(t, x, u)$ и $\psi(t, x, u)$ гарантирует виброустойчивость в каждой точке любого непрерывного управления $u(t)$ (см. ([1], [2])). Если функция $\varphi(t, x, u)$ не имеет вторых производных, то гарантировать виброустойчивость каждого непрерывного управления нельзя. Однако верна

Теорема 6. *Пусть функция* $\varphi(t, x, u)$ *непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по* t *и* x. *Пусть функция* $\psi(t, x, u)$ *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет по переменной* x *локальному условию Липшица.*

Тогда любое непрерывно дифференцируемое управление виброустойчиво в каждой точке.

Автор выражает благодарность М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
г. Москва

Поступило
18 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, **195**, № 3, 544 (1970). [2] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, **200**, № 2 (1971). [3] W. Prager, J. Appl. Mech., **23**, 493 (1956). [4] J. F. Besseling, J. Appl. Mech., **25**, 529 (1958). [5] А. Ю. Ишлинский, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 583 (1944). [6] М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966.