Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 530.12:531.51 *ФИЗИКА*

Р. Ф. ПОЛИЩУК

ИЗОМЕТРИИ ПФАФФОВЫХ СИСТЕМ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 6 V 1972)

Целью настоящей статьи является определение понятия группы движения для пфаффовой системы (риманова распределения) с помощью вводимого здесь индуцированного оператора Ли. В качестве примеров распределений (пфаффовых систем) рассматриваются и описываются время и пространство. Определение группы движения для времени и пространства по отдельности может привести к космологическим моделям, пространство которых допускает группу движения большей размерности, чем пространство — время, за счет того, что время не допускает соответствующей группы. В результате следующего отсюда обобщения понятия однородности космологических моделей, понимаемой как однородность какого-нибудь их пространства, может быть увеличен класс однородных моделей.

Метрика g риманова многообразия V^n индуцирует некоторые метрики a и b на неизотропных ортогонально дополнительных (двойственных) распределениях $V_m{}^n$ и V_{n-m}^n, прямая сумма которых образует касательное многообразие TV^n:

$$TV^n = V_m^n + V_{n-m}^n,$$
$$V_m^n : x \mapsto E_x^m \subset T_x V^n, \quad x \in V^n;$$
$$g_{ij}(x) = a_{ij}(x) + b_{ij}(x), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$
$$a_{ij} a_k^j = a_{ik}, \quad a_{ij} b_k^j = 0, \quad b_i^j b_{jk} = b_{ik},$$
$$a_i^k : TV^n \to V_m^n, \quad b_i^k : TV^n \to V_{n-m}^n.$$

Указанное расщепление однозначно определяется некоторой m-формой или полем простого m-вектора на V^n. В частности, пфаффова форма

$$\omega = u_i dx^i, \quad u_i u^i = 1, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

при сигнатуре $(+---)$ пространства — времени V^4 определяет расщепление пространства — времени на пространство и время ([1, 2]):

$$TV^4 = V_1^4 + V_3^4 = \Theta + \Sigma,$$

где время Θ и пространство Σ определяются как ориентированные поля направлений (единичных) вектора u^i и ковектора u_i, т. е. как двойственные друг другу римановы распределения (пфаффовы системы) с метриками

$$a_{ij} = u_i u_j, \quad b_{ij} = g_{ij} - u_i u_j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Интегральная для Θ конгруэнция кривых $\Gamma(u)$ (времениподобное одномерное слоение V^4) называется *системой* отсчета. Она является геометрическим эквивалентом некоторого тела отсчета (континуума наблюдателей).

Определим в V^n индуцированные операторы частного, лиевского и ковариантного дифференцирования с помощью проекторов ([3, 4]) a и b. Пусть имеется тензор (тензорное поле)

$$T_{i\ldots jk\ldots l} = a_{i\ldots j}^{a\ldots b} b_{k\ldots l}^{c\ldots d} T_{a\ldots bc\ldots d}, \quad a, \ldots, l = 1, \ldots, n,$$
$$a_{i\ldots j}^{a\ldots b} \equiv a_i^a \ldots a_j^b, \ b_{k\ldots l}^{c\ldots d} \equiv b_k^c \ldots b_l^d, \ a_i^a + b_i^a = \delta_i^a.$$

Полагаем

$$\partial_p \equiv \partial / \partial x^p = a_p^q \partial_q + b_p^q \partial_q = \partial_p' + \partial_p'', \quad v_i = v_i' + v_i'',$$
$$\underline{\partial}_p T_{i\ldots jk\ldots l} \overset{\text{def}}{=} a_{i\ldots j}^{a\ldots b} b_{k\ldots l}^{c\ldots d} \partial_p T_{a\ldots bc\ldots d},$$

$$\underline{L}_\xi T_{i\ldots jk\ldots l} \overset{\mathrm{def}}{=} a_{i\ldots j}^{a\ldots b} b_{k\ldots l}^{c\ldots d} L_\xi T_{a\ldots bc\ldots d},$$

$$\overline{\nabla}_p T_{i\ldots jk\ldots l} \overset{\mathrm{def}}{=} a_{i\ldots j}^{a\ldots b} b_{k\ldots l}^{c\ldots d} \nabla_p T_{a\ldots bc\ldots d}, \quad \overline{\nabla}_p = \nabla_p' + \nabla_p'',$$

$$L_\xi' T_{i\ldots jk\ldots l} \overset{\mathrm{def}}{=} \xi^p \nabla_p' T_{i\ldots l} + T_{p\ldots l} \nabla_i' (\xi'^p + \xi''^p) + \ldots,$$

$$L_\xi'' T_{i\ldots l} \overset{\mathrm{def}}{=} \xi^p \nabla_p'' T_{i\ldots l} + T_{p\ldots l} \nabla_i'' \xi^p + \ldots + T_{i\ldots p} \nabla_l'' \xi^p.$$

Отметим следующие равенства:

$$\nabla_i' a_{jk} = 0, \quad \nabla_i'' a_{jk} = 0, \quad \underline{\partial}_i a_j^k = 0,$$

$$\nabla_i' v_j' = \underline{\partial}_i' v_j' - \Gamma_{ij}'^k v_k', \quad \Gamma_{ij}'^k = a_{ijc}^{abk} \Gamma_{ab}^c,$$

$$\nabla_i'' v_j' = \underline{\partial}_i'' v_j' - {}'\Gamma_{ij}^k v_k', \quad {}'\Gamma_{ij}^k = b_i^a a_{jc}^{bk} \Gamma_{ab}^c;$$

$$\Gamma_{ij}'^k = {}^1/{}_2 a^{kl} (\underline{\partial}_i' a_{lj} + \underline{\partial}_j' a_{li} - \underline{\partial}_l' a_{ij});$$

$$\nabla_i'' v_j'' = \underline{\partial}_i'' v_j'' - \Gamma_{ij}''^k v_k'', \quad \Gamma_{ij}''^k = b_{ijc}^{abk} \Gamma_{ab}^c;$$

$$\nabla_i' v''^k = \underline{\partial}_i' v''^k + {}''\Gamma_{ij}^k v''^j, \quad {}''\Gamma_{ij}^k = a_i^a b_{jc}^{bk} \Gamma_{ab}^c;$$

$$\nabla_i v_j = \partial_i v_j - \Gamma_{ij}^k v_k = \overline{\nabla}_i v_j + (H_{i\cdot j}^{k} - \overline{H}_{ij}{}^k) v_k' + (\overline{H}_{i\cdot j}^{k} - H_{ij}{}^k) v_k'';$$

$$H_{ij}{}^k = a_{ij}^{ab} \nabla_a a_b^k, \quad \overline{H}_{ij}{}^k = b_{ij}^{ab} \nabla_a b_b^k,$$

$$H_{ij}{}^k = H_{(ij)}{}^k + H_{[ij]}{}^k = (\mathrm{Sym} + \mathrm{Alt}) H_{ij}'^k = N_{ij}{}^k + M_{ij}{}^k;$$

$$L_\xi g_{ij} = L_\xi' a_{ij} + L_\xi'' b_{ij} - 2\xi^k (N_{ijk} + \overline{N}_{ijk} - H_{(i|k|j)} - \overline{H}_{(i|k|j)});$$

$$L_\xi' a_{ij} = \nabla_i' \xi_j + \nabla_j' \xi_i, \quad L_\xi'' b_{ij} = \nabla_i'' \xi_j + \nabla_j'' \xi_i, \quad \xi_i = \xi_i' + \xi_i'';$$

$$L_{\xi'}' a_{ij} = \nabla_i' \xi_j' + \nabla_j' \xi_i' = \xi'^k \underline{\partial}_k' a_{ij} + a_{ki} \underline{\partial}_j' \xi'^k + a_{kj} \underline{\partial}_i' \xi'^k;$$

$$L_{\xi''}' a_{ij} = \nabla_i' \xi_j'' + \nabla_j' \xi_i'' = \underline{\partial}_i' \xi_j'' + \underline{\partial}_j' \xi_i'', \quad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Тензоры H, M, N будем называть тензорами внешней неголономности, внешнего кручения и внешней кривизны $V_m{}^n$ соответственно [2]. Для инволютивного $V_m{}^n$ имеем $M_{ij}{}^k = 0$. Для случая $V_m{}^n = \Theta$ получаем

$$H_{ij}{}^k = a_{ij} f^k, \quad \overline{H}_{ij}{}^k = -h_{ij} u^k;$$

$$\nabla_i u_j = u_i f_j - h_{ij}, \quad f_j = u^k \nabla_k u_j,$$

$$h_{ij} = h_{(ij)} + h_{[ij]} = d_{ij} + \omega_{ij},$$

$$L_{\xi'} a_{ij} = 2\lambda (u_{(i} f_{j)} + u_{(i} \partial_{j)} \ln|\lambda|), \quad \lambda = \xi^i u_i;$$

$$L_{\xi''} a_{ij} = -2\xi''^k (a_{ij} f_k - u_i \omega_{jk} - u_j \omega_{ik}),$$

$$L_{\xi'} b_{ij} = -2\lambda d_{ij};$$

$$L_{\xi''} b_{ij} = L_{\xi''}'' b_{ij} + 2 (u^k \nabla_k \xi''^l) b_{l(i} u_{j)} + 2\xi''^k h_{k(i} u_{j)};$$

$$L_{\xi'}' a_{ij} = 2\dot{\lambda} a_{ij}, \quad \dot{\lambda} = u^k \partial_k \lambda;$$

$$L_{\xi'}'' b_{ij} = \nabla_i'' \xi_j' + \nabla_j'' \xi_i' = 2u_{(i} \partial_{j)}'' \lambda;$$

здесь тензор d описывает деформацию, ω — вращение пространства Σ, а вектор неголономности времени f — ускорение системы отсчета Γ (гравитационно-инерциальная сила, изменяющая через влияние на скорость темп времени тела отсчета) [1, 2].

Связь обычного и индуцированного увлечения метрики видна из соотношений (двойственные равенства опускаем):

$$L_{\xi'} a_{ij} = L_{\xi'}' a_{ij} + L_{\xi'}'' b_{ij} + 2\xi'^k H_{k(ij)}, \quad \xi'^k \in V_m^n;$$

$$L_{\xi''} a_{ij} = -2\xi''^k (N_{ijk} - \overline{M}_{ikj} - \overline{M}_{jki}), \quad \xi''^k \in V_{n-m}^n;$$

$$L_{\xi'}a_i^k = -L_{\xi'}b_i^k = \nabla_i''\xi'^k + \xi'^j(2M_{ji}{}^k + H_{j\cdot i}^k);$$
$$L_{\xi'}a^{ij} = L'_{\xi'}a^{ij} + 2\xi'^k(H_k{}^{(ij)} - H_k^{(i\cdot j)});$$
$$L_{\xi''}a^{ij} = L'_{\xi''}a^{ij} + 2\xi''^k(N^{ij}{}_k - \bar{H}_k^{(ij)}).$$

В частности, в первом уравнении второй член суммы компенсирует проектирование, а последний учитывает неримановость внешнего перенесения индуцированной метрики.

Определение 1. Векторное поле ξ называется ли-каноническим для двойственных распределений (V_m^n, a), (V_{n-m}^n, b), если
$$L_\xi g_{ij} = L'_\xi a_{ij} + L''_\xi b_{ij}.$$

Очевидно, пространство и время допускают ли-каноническое поле векторов, если
$$\xi^i\nabla_j u_i = -u^i\nabla_j\xi_i = 0,$$
т. е.
$$f^i\Omega_i = 0, \quad \Omega^i d_{ij} = 0, \quad \xi^i = \mu\Omega^i,$$
$$\Omega^i \equiv {}^1/{}_2\eta^{ijkl}u_j\omega_{kl}, \quad \eta_{ijkl} \equiv \sqrt{-g}\varepsilon_{ijkl}.$$

Другими словами, отсутствует деформация и ускорение вдоль вектора вращения Ω системы отсчета, задающего ли-каноническое направление.

Определим классификацию систем отсчета. Будем считать классом k системы отсчета Γ класс формы $\omega = u_i dx^i$ (²). При $k = 1$, 2 конгруэнция $\Gamma(u)$ нормальна (трехмерному слоению), при $k = 3$ бивектор ω^{ij} есть проекция на Σ нормального (двухмерному слоению) бивектора. Синхронные системы отсчета исчерпывают класс 1. Время систем отсчета четного класса (2, 4) неголономно (негеодезично).

При конформном преобразовании $\tilde{g}_{ij} = \lambda^{-2}g_{ij}$ роль единичного вектора переходит к вектору $\tilde{u}^i = \lambda u^i$. Тогда
$$\tilde{f}_i = f_i + \partial_i''\ln|\lambda|, \quad \tilde{\omega}_{ij} = \lambda^{-1}\omega_{ij}, \quad \dot{\tilde{\omega}}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} - \omega_{ij}\ln^{\cdot}|\lambda|, \quad \dot{\omega}_{ij} \equiv L_u\omega_{ij},$$
$$\dot{\tilde{\omega}}_{ij} \equiv L_{\tilde{u}}\tilde{\omega}_{ij}, \quad \tilde{d}_{ij} = \lambda^{-1}(d_{ij} - \ln^{\cdot}|\lambda|b_{ij}).$$

Отсюда следует, что время Θ инволютивного пространства Σ $(k = 1,\ 2)$ конформно-геодезично (а нормальная изотропная конгруэнция кривых просто геодезична). Действительно,
$$\omega_{ij} = 0 \to u_i = \lambda\,\partial_i\tau \to f_i = -\partial_i''\ln|\lambda|.$$

Распределение $V_m{}^n$ минимально, если вектор средней внешней кривизны $d^i \equiv 1/nH_k^{\cdot ki}$ равен нулю, и геодезично, если $H_{ij}^k = 0$. Очевидно, любое пространство конформно-минимально, находится в конформном соответствии с минимальным пространством $\tilde{\Sigma}$, деформирующимся с сохранением объемов, а геодезические жесткого $(d_{ij} = 0)$ и инволютивного $(\omega_{ij} = 0)$ пространства суть геодезические пространства — времени.

Из тождеств Якоби для проектированных производных (¹)
$$\dot{\omega}_{ij} + \nabla''_{[i}f_{j]} = 0, \quad (\nabla_i'' + f_i)\,\Omega^i = 0,$$
$$\dot{\omega}_{ij} = L_u\omega_{ij}, \quad i, j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

следует, что вращение пространства геодезического времени стационарно (причем ускорения лежат в плоскости вращения, $f_i\Omega^i = 0$), а конформно-геодезического — конформно-стационарно (изменяется величина, но не направление вращения, параллельное, кроме того, пространственной компоненте ротора ускорения). Очевидна

Лемма. *Распределение для внешнего кручения $V_2{}^4(\omega)$ (поле направлений простого бивектора ω^{ij}) неинволютивно.*

Действительно, иначе $V_2{}^4(\omega) + V_1{}^4(\Omega) = \Sigma$ инволютивно. Тензор d_{ij} определяет омбилические (конформно-жесткие) точки и канонические по отношению к времени пространственные направления внешней кривизны ([5]). Идикатрисы внешней кривизны и внешнего кручения пространства из-за одномерности времени вырождаются в пары точек.

Геометрия поверхностей уровня кривизны и кручения дополнительно характеризует структуру пространства.

Определение 2. Риманово распределение V_m^n с метрикой a допускает внутреннюю группу движения вдоль векторного поля ξ, если

$$L'_\xi a_{ij} \equiv \nabla'_i \xi_j + \nabla'_j \xi_i = 0, \quad \xi_i = \xi'_i + \xi''_i, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Определение 3. Риманово распределение (V_m^n, a) допускает внешнюю группу движения вдоль векторного поля ξ, если

$$L_\xi a_{ij} \equiv \xi^k \nabla_k a_{ij} + a_{ik} \nabla_j \xi^k + a_{jk} \nabla_i \xi^k = 0.$$

Решения уравнений Киллинга для V_m^n будем называть внешними и внутренними векторами Киллинга для распределения. Будем говорить также, что распределение V_m^n внешне (внутренне) однородно, если оно содержит m линейно независимых внешних (внутренних) векторов Киллинга, и что V_m^n внешне (внутренне) жестко, если двойственное распределение V_{n-m}^n содержит внешний (внутренний) вектор Киллинга для V_m^n. Если этих векторов $n-m$, V_m^n вполне жестко.

Внешняя однородность времени, очевидно, эквивалентна градиентности ускорения f, а внешнюю жесткость времени имеем лишь вдоль вектора вращения Ω при его ортогональности вектору ускорения. Если, кроме того, $\Omega^i d_{ij} = 0$, то конгруэнции $\Gamma(u)$, $\Gamma(\Omega)$, как упоминалось, взаимно ли-канонические. В системе координат $\Omega^i = \delta_1^i$ скаляр $\lambda = -\int f_1\, dx^1$ определяет конформное Σ пространство $\widetilde{\Sigma}(\tilde{u}^i = \lambda u^i)$, в котором время жестко. Таким образом, справедлива

Теорема. *Любое гладкое время Θ допускает конформную группу движения.*

Это является, конечно, следствием одномерности времени, равно как и внутренняя однородность времени и внутреняя жесткость пространства. Конформная жесткость пространства эквивалентна, очевидно, его омбиличности ($d_{ij} = \mu b_{ij}$, деформация изотропна). Если $\Omega^i d_{ij} = 0$, то метрика пространства постоянна (в смысле внешнего параллельного перенесения) вдоль $\Gamma(\Omega)$, а при $f^i = 0$ — вдоль $\Gamma(u)$. Сохранение же метрики при увлечении вдоль $\Gamma(u)$ требует $d_{ij} = 0$, откуда виден характер отличия перенесения индуцированной метрики от ее увлечения, и причина этого отличия — кривизна V^4, тяготение, проявляющееся в нежесткости неускоренной и ускорении жесткой (не всегда возможной) систем отсчета.

Примерами изменения групп движения при переходе от распределения ко всему многообразию является метрика

$$ds^2 = ch^2\sqrt{-2\lambda}x\, dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

(λ — космологический член, тензор $T_i^j = \mathrm{diag}\,(-\lambda, -\lambda, \lambda, \lambda)$ отвечает постоянному магнитному полю), метрики приводимых и «бипарных» пространств ([6]).

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений
пос. Менделеево Моск. обл.

Поступило
18 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Зельманов, ДАН, **107**, 815 (1956); Тез. докл. V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968. [2] Р. Ф. Полищук, ЖЭТФ, **62**, 5 (1972). [3] J. A. Schouten, D. van Dantzig, Zs. Phys., **78**, 639 (1932). [4] J. A. Schouten, E. R. van Kampen, Math. Ann., **103**, 752 (1930). [5] G. Ricci, Mem. Accad. di Li, Roma (5), 2, 276 (1895). [6] M. Delsarte, J. Math. Pures Appl., **13**, 19 (1934).