

А. А. ШИЛОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОДВИЖНОСТИ МАЛОЙ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ НА КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА ПРИ ТОРМОЖЕНИИ В АТМОСФЕРЕ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 23 III 1972)

В предположении, что взаимодействие аппарата и массы, движущейся по сфере внутри аппарата, подчиняется закону кулонова трения, проводится теоретический анализ природы демпфирующего эффекта от подвижного груза. Решение доводится до компактных аналитических выражений.

Введем три системы координат: 1) инерциальную lmn , 2) связанную с аппаратом $Oxyz$, 3) связанную с маятником $O'\xi\eta\zeta$, где O' — центр шарнира (рис. 1).

Обозначая d/dt абсолютную производную, $\tilde{d}/dt$ — относительную производную в осях $Oxyz$, $\tilde{\tilde{d}}/dt$ — производную в осях $O'\xi\eta\zeta$, K_0 — кинетический момент маятника около его центра масс, L — кинетический момент

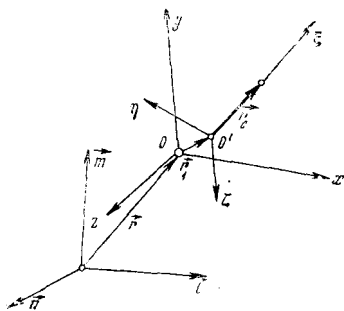


Рис. 1

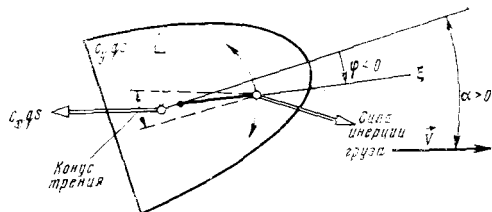


Рис. 2

аппарата, F_p , M_p — силу и момент взаимодействия в шарнире соответственно, m , M ; G_r , G_a — массы и вес груза и аппарата; M_a , F_a — аэродинамические момент и силу, действующие на аппарат, можно записать уравнения пространственного движения

$$\frac{\tilde{d}K_0}{dt} + \omega_2 \times K_0 = \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} (F_a \times r_c) - \frac{\bar{m}M}{1 + \bar{m}} \{r_c \times [(\mathbf{e}_2 \times r_c) + (\mathbf{e}_1 \times r_1) + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_c) + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_1)]\} + M_p, \quad \bar{m} = m/M, \quad d\omega_2/dt = \mathbf{e}_2; \quad (1)$$

$$\tilde{d}L/dt + \omega_1 \times L = M_a - \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} (r_1 \times F_a) - \frac{\bar{m}M}{1 + \bar{m}} \{r_1 \times [\mathbf{e}_2 \times r_c + \mathbf{e}_1 \times r_1 + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_1) + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_c)]\} - M_p, \quad d\omega_1/dt = \mathbf{e}_1; \quad (2)$$

$$M \frac{dV}{dt} = F_a + G_a + F_p, \quad m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_c}{dt^2} \right) = G_r - F_p. \quad (3)$$

Кинематические уравнения имеют вид $d\|l\|/dt = \|l\| \cdot \|\omega_1\|$, где $\|\omega_1\|$ — матрица вращений аппарата, $\|l\|$ — матрица перехода из осей $Oxyz$ в оси lmn с элементами l_{ij} , $\dots$, $n_j n_i$ построчно; $d\|\mu_v\|/dt = \|\mu_v\| \|\omega_2\| + \|\nu_\mu\| \|\omega_1\|$, где $\mu = x, y, z$, $\nu = \xi, \eta, \zeta$, т. е. $r_c = r_c(x_\xi, y_\xi, z_\xi)$, а $x_i y_i z_i$ — направляющие косинусы ортов осей $Oxyz$ в осях $O'\xi\eta\zeta$: $x_\xi, x_\eta, x_\zeta, \dots, z_\xi, z_\eta, z_\zeta$ построчно в

$\|\mu_v\|, \|\nu_\mu\| = \|\mu_v\|^T$. В случае плоского движения $\varepsilon_{2\xi}, \varepsilon_{2\eta}, \omega_{2\xi}, \omega_{2\eta}, \varepsilon_{1x}, \varepsilon_{1y}, \omega_{1x}, \omega_{1y}$ равны нулю.

Будем считать груз точкой, опустим индексы 1 и 2 и запишем

$$M_p = r_c f N \operatorname{sign} \dot{x}_\eta, \quad N = (F_p \cdot r_c), \quad (4)$$

$$F_{ax} = -C_\tau(\alpha) q S, \quad F_{ay} = C_n(\alpha) q S, \quad M_{az} = m_z^a q S L \alpha + m_z^{\omega_z} \frac{q S L^2}{V} \omega_z.$$

q — скоростной напор, α — угол атаки, f — коэффициент трения, $C_n^a, m_z^a = \text{const}$, $\sin \varphi = y_\xi = -x_\eta$, $\cos \varphi = x_\xi = y_\eta$ (рис. 2).

Описываемая механическая система может находиться в двух режимах движения: а) $-y_\xi = x_\eta = \text{const}$, б) $x_\eta \neq \text{const}$ в соответствии с условиями скольжения или покоя точки с массой m на дуге радиуса r_c .

При покое массы m в осях $Oxyz$

$$\begin{aligned} \left[I_z + \frac{\bar{m} M}{1 + \bar{m}} (r_1^2 + r_c^2 + 2r_1 r_c \cos \varphi) \right] \varepsilon_z^\Pi = \\ = M_{az} - \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} [F_{ay} (r_1 + r_c y_\eta) + r_c x_\eta F_{ax}], \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_p^\Pi = M_{az} - \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} [r_1 F_{ay} - M r_c r_1 \omega_z^2 y_\xi] - \varepsilon_z^\Pi \left[I_z + \frac{\bar{m} M}{1 + \bar{m}} (r_1 + r_c \cos \varphi) r_1 \right].$$

При скольжении массы m

$$\begin{aligned} \left[I_z + \frac{\bar{m} M}{1 + \bar{m}} (1 - x_\xi y_\eta) r_1^2 + (r_c + r_1 y_\eta) r_1 y_\xi \frac{m f}{1 + \bar{m}} \operatorname{sign} \dot{\varphi} \right] \varepsilon_z^\Pi = \\ = M_{az} - \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} \left[r_1 (1 - y_\eta^2) F_{ay} - x_\eta y_\eta F_{ax} r_1 - M r_c r_1 \omega_z^2 y_\xi + M r_1^2 y_\eta x_\eta \omega_z^2 \right] - \\ - (r_c + r_1 y_\eta) \frac{f \operatorname{sign} \dot{\varphi}}{1 + \bar{m}} [\bar{m} (F_{ax} x_\xi + F_{ay} y_\xi) - m r_1 \omega_z^2 x_\xi - m r_c \omega_z^2], \end{aligned} \quad (6)$$

$$M_p^\Pi = r_c \frac{\bar{m} f \operatorname{sign} \dot{\varphi}}{1 + \bar{m}} [F_{ax} x_\xi + F_{ay} y_\xi + M \varepsilon_z^\Pi r_1 y_\xi - M r_1 \omega_z^2 x_\xi - M r_c \omega_z^2].$$

Видно, что $\dot{\varphi} = \omega_\xi - \omega_z$, а величину ε_z^Π надо определять с помощью уравнения вида (1).

Движение массы m по дуге радиуса r_c начинается в тот момент, когда момент реакции покоя M_p^Π сравнивается с максимальным моментом сцепления при сухом трении. Движение массы m относительно аппарата заканчивается, когда φ обращается в нуль, при этом $M_p(t)$ терпит разрыв.

При малых углах φ и α , пренебрегая силой веса (что обычно делают, рассматривая полет скоростных аппаратов), уравнения сил можно записать в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - \frac{C_y^a q S x}{M V (1 + \bar{m})} - \frac{\bar{m} C_\tau q S \varphi}{(1 + \bar{m}) M V} + \frac{M_p}{r_c M V} - \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}} F_{ay} \frac{1}{M V}, \quad (7)$$

где $C_y^a = C_n^a - C_\tau(0)$.

Можно считать, что сила сухого трения приложена к грузу в точке на дуге радиуса r_c . Если пренебречь силами инерции, пропорциональными $d^2\varphi/dt^2$, то вынужденные колебания $\varphi(t)$ при $\bar{m} \ll 1$ будут носить квазистатический характер и состоять из последовательных отрезков покоя и скольжения груза в таком положении $\varphi(t)$, когда действующая сила инерции от движения аппарата по траектории и вращения аппарата $\alpha(t)$ проходит по образующей конуса трения; тогда $\varphi(t)$ может быть выражено через $\alpha(t)$.

Для анализа обратного влияния движения груза на движение аппарата выделим в уравнениях (5)–(7) члены, содержащие $\bar{m}$, φ , α только в первых степенях, в частности, полагая

$$\left[I_z + \frac{\bar{m} M}{1 + \bar{m}} (r_1 + r_c)^2 \right] \varepsilon_z = I_z \varepsilon_z + \bar{m} M (r_1 + r_c)^2 \varepsilon_z \Big|_{\bar{m}=0} + O(\bar{m}^2).$$

При квазистатическом скольжении груза $M_p^n = M_p^n$, т. е. при заданном $\alpha(t)$ функция $\varphi(t)$ определяется из соотношения

$$F_{ax} \varphi = F_{ay} + \frac{M(r_1 + r_c)}{I_z} M_{az} - f F_{ax} \operatorname{sign} \dot{\varphi}. \quad (8)$$

При принятой модели движения груза можно установить, что выражение, содержащее φ и M_p в правой части уравнения (7), имеет один и тот же вид как в случае покоя, так и в случае движения груза, при малых $\bar{m}$, α , φ :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - C_y^a \frac{qS}{MV} \frac{\alpha}{1 + \bar{m}} + \frac{\bar{m}(r_c + r_1)}{V} \frac{M_{az}}{I_z}. \quad (9)$$

Уравнение моментов запишем с помощью (8) в виде

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = m_z^a qSL\alpha + m_z^{\omega_z} \frac{qSL^2}{V} \omega_z - \bar{m}r_1 \left[C_n^a qS + \frac{M(r_1 + r_c)}{I_z} m_z^a qSL \right] \alpha - M_p^{\omega\Phi}. \quad (10)$$

$$M_p^{\omega\Phi} = \begin{cases} -\bar{m}r_c f C_\tau qS \operatorname{sign} \dot{\varphi}, \\ \bar{m}r_c \left[C_n^a \alpha + \frac{M(r_1 + r_c)L}{I_z} m_z^a \alpha + C_\tau \varphi_{am} \right] qS, \end{cases}$$

где φ_{am} — последнее пройденное максимальное отклонение $\varphi(t)$, взятое с учетом знака.

Для решения системы (9), (10) можно использовать метод усреднения ⁽¹⁾. За невозмущенное примем решение уравнений при $q, V = \text{const}$: $m_z^a, C_y^a, M_p^{\omega\Phi} = 0$:

$$\alpha = A \cos \psi; \quad \omega_z = -\lambda A \sin \psi, \quad A > 0, \quad (11)$$

$$\psi = \psi_0 + \int_0^t \lambda dt, \quad \lambda^2 = -\frac{m_z^a qSL}{I_z} + \frac{\bar{m}r_1}{I_z} \left(C_n^a + \frac{M(r_1 + r_c)L}{I_z} m_z^a \right) qS.$$

При $m_z^{\omega_z}, C_y^a = \text{const} \neq 0, M_p^{\omega\Phi} \neq 0, q = q(\tau); V = V(\tau)$, где $\tau = \varepsilon t$, ε — малый параметр, будем искать $A = A(\tau), \psi_0 = \psi_0(\tau)$.

Усредняя производные $dA/d\tau, d\psi_0/d\tau$ по периоду $\psi(t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} = & -\frac{A}{2} \left[C_y^a \frac{qS}{V(m+M)} - \frac{\bar{m}(r_1 + r_c)L}{I_z V} m_z^a qS \right] + \frac{A}{2} m_z^{\omega_z} \frac{qSL^2}{I_z V} - \\ & - \frac{A}{2\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + \frac{1}{2\pi I_z \lambda} \int_0^{2\pi} M_p^{\omega\Phi} \sin \psi d\psi, \quad A \frac{d\psi_0}{d\tau} = \frac{1}{2\pi I_z \lambda} \int_0^{2\pi} M_p^{\omega\Phi} \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая (10), легко получить

$$\int_0^{2\pi} M_p^{\omega\Phi} \sin \psi d\psi = -4M_p^{\omega\Phi} \max \bar{A}_c, \quad (13)$$

где $\bar{A}_c$ — значение $\alpha(t) > 0$, при котором $M_p^{\omega\Phi} = 0$,

$$M_p^{\omega\Phi} \max = \bar{m}r_c f C_\tau qS; \quad \frac{\bar{A}_c}{A} = \bar{A}_c = 1 - f C_\tau \left(\left(C_n^a + \frac{M(r_1 + r_c)L}{I_z} m_z^a \right) A \right)^{-1} > 0. \quad (14)$$

$$\int_0^{2\pi} M_p^{\omega\Phi} \cos \psi d\psi = \bar{m}r_c f C_\tau qS \frac{\psi_1 - 1/2 \sin 2\psi_1}{\sin^2 1/2 \psi_1},$$

где $\psi_1 = 2 \arccos (\bar{A}_c)^{1/2}$, т. е. при $\psi = \psi_1$ момент $M_p^{\omega\Phi}$ принимает значение $-M_p^{\omega\Phi} \max$.

Амплитудное значение $\varphi(t)$, соответствующее моменту $\alpha(t) = A > 0$, может быть определено по формуле

$$C_n^a \alpha + \frac{M(r_1 + r_c)L}{I_z} m_z^a \alpha + C_\tau \varphi_{am} = f C_\tau; \quad (15)$$

откуда, принимая $\varphi_{am} = 0$, можно определить минимальное значение $A_{\min}$, при котором груз будет выходить на режим скольжения. Величина $A_{\min}$

зависит от распределения нормальных ускорений вдоль оси аппарата и расположения точки подвеса маятника (r_1 может быть отрицательным). Видно, что $A_{\min}$ уменьшается при смещении точки подвеса к хвосту аппарата ($r_1 < 0$).

Из (14) видно, что $d\psi_0/d\tau > 0$, так как правая часть (14) с уменьшением A растет, вследствие чего растет и $d\psi_0/d\tau$, т. е. с уменьшением A период колебаний $\alpha(t)$ получает тенденцию к уменьшению, а влияние скольжения груза дает уменьшение статической устойчивости (роль скольжения растет с ростом A). Из (12), (13) видно, что при $\bar{A}_c > 0$ груз обеспечивает демпфирование.

Если иметь в виду различные аппараты, то оценить влияние подвижности груза можно, умножив последнее слагаемое в первом уравнении (12) на величину мгновенного периода колебаний $T(\tau) = 2\pi/\lambda$, где $\lambda^2 = |m_z^*|qSL/I_z$ (см. (11)):

$$\Delta \left(\frac{dA}{d\tau} \right) \frac{2\pi}{\lambda} = -4\bar{m}\bar{r}_c f \frac{C_\tau}{|m_z^*|} \left[1 - \frac{fC_\tau}{A \left(C_n^a + \frac{M(r_1 + r_c)L}{I_z} m_z^a \right)} \right]. \quad (16)$$

В последнем выражении при фиксированном A существует оптимальная величина f , дающая абсолютной величине (16) максимум. Изменяя r_c при $A, f = \text{const}$, то можно также максимизировать абсолютную величину выражения (16)*, выбирая $r_c = r_c^*$:

$$\frac{r_c^* + r_1}{I_z} MLM_z^a + C_n^a = + \sqrt{\frac{fC_\tau}{A} \left(C_n^a + \frac{r_1 LM}{I_z} m_z^a \right)}.$$

Выражение в квадратной скобке (16) предельно упрощается, если $r_1 + r_c = 0$ (если груз располагается вблизи центра масс аппарата). Для сферического аппарата $C_n^a = C_\tau(0)$, тогда в скобке (16) остается лишь угол полураствора конуса трения и амплитуда колебаний. Скорость уменьшения $A(\tau)$ возрастает с ростом коэффициента трения f , но при этом возрастает амплитуда колебаний $A_{\min}$, ниже которой демпфирование от груза исчезает**.

Из (16) видно, что при $r_1 + r_c > 0$, $m_z^a < 0$ демпфирование убывает с ростом r_1 . Величину m_z^a можно выразить через запас статической устойчивости $\bar{\Delta}x > 0$ и C_n^a ($m_z^a = -\bar{\Delta}x C_n^a$, $\bar{\Delta}x(\alpha) = \text{const}$), тогда для устойчивости необходимо при $C_n^a > 0$ и $A > A_{\min}$:

$$\bar{r}_c + \bar{r}_1 < \bar{r}_z^2 / \bar{\Delta}x, \quad \bar{r}_z^2 = I_z / (ML^2). \quad (17)$$

При малом запасе устойчивости это соотношение легко выполняется.

Как видно, вклад влияния подвижности груза на скорость изменения амплитуды колебаний аддитивен с обычными эффектами от C_y^a , m_z^a и переменности частоты колебаний по времени⁽²⁾.

Анализ влияния подвижности груза на $dA/d\tau$ и $d\psi_0/d\tau$ допускает простую интерпретацию. Поскольку подвижность груза приводит к уменьшению статической устойчивости, то груз создает дестабилизирующий позиционный момент на аппарат. Но из-за действия трения этот момент запаздывает по отношению к $\alpha(t)$ и, таким образом, эквивалентен опережающему стабилизирующему моменту, который и создает демпфирование.

Центральный аэрогидродинамический институт

им. Н. Е. Жуковского

Москва

Поступило

7 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 1963. ² G. E. Kuzmak, V. A. Jaroshevski, Application of the Asymptotic Methods to Some Problems of the Re-Entry Vehicles Dynamics, Proc. XIV IAF Congress, Paris, 1963.

* При $r_1 + r_c = \text{const}$ увеличение r_c повышает степень затухания колебаний (16).

** Полученная оценка дает заниженное значение степени затухания колебаний; точность формул (12) — (16) лучше, если A в несколько раз больше f , так как при этом инерционное приращение амплитуды ϕ мало по сравнению с $|\phi_{\text{ам}}|$ в (15).