

УДК 512.932

МАТЕМАТИКА

А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНАЯ АБЕЛЕВА ГРУППА С ТРИВИАЛЬНЫМИ ДВУМЕРНЫМИ БАНАХОВЫМИ КОГОМОЛОГИЯМИ КОМПАКТНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 X 1971)

В работе ⁽¹⁾ был предложен метод, позволяющий для любой бесконечномерной функциональной банаховой алгебры A находить банаховы A -модули, гомотологическая размерность которых больше единицы. В настоящей заметке с помощью этого метода устанавливается утверждение, сформулированное в заглавии.

Пусть G — локально компактная топологическая группа, $L^1(G)$ — ее групповая (банахова) алгебра. Под G ($L^1(G)$)-модулем или бимодулем мы будем подразумевать левый банахов модуль или банахов бимодуль над G ($L^1(G)$). Напомним, что G -бимодуль X является и $L^1(G)$ -бимодулем с операциями, определенными формулами $f \cdot x = \int_G f(g)(g \cdot x)dg$

и $x \cdot f = \int_G f(g)(x \cdot g)dg$, $f \in L^1(G)$, $x \in X$. В частности, G -модуль X , если его рассмотреть как бимодуль с тривиальным правым действием группы, может быть отождествлен со скалярным $L^1(G)$ -бимодулем, в котором правое внешнее умножение задано равенством $x \cdot f = \int_G f(g)xdg$.

Используемые ниже понятия (относительно) проективного $L^1(G)$ -модуля, групп Ext и гомотологической размерности $L^1(G)$ -модуля X (обозначение $\text{dh } X$) определены в ⁽²⁾. Через $\mathbb{C}$ будем обозначать комплексную плоскость, рассматриваемую как G -модуль с тривиальным действием; отметим, что для любого G -модуля X из леммы 6.1 ⁽³⁾ немедленно следует $\text{Ext}^n(\mathbb{C}, X) = H^n(L^1(G), X)$, $n \geq 0$ (определение группы когомологий банаховых алгебр см., например, ⁽³⁻⁵⁾).

Группы $\text{Ext}^n(\mathbb{C}, X)$ мы будем называть группами когомологий группы G с коэффициентами в X и обозначать через $H^n(G, X)$. (Несколько отличное от приведенного определение когомологии локально компактных групп ранее предложил А. Гиппарде ⁽⁶⁾; там же обсуждены условия, при которых введенные им когомологии групп выражаются через когомологии их групповых алгебр. Исходя из общей концепции «выражать всё через Ext » (ср. ⁽⁷⁾), мы предпочли именно последние когомологии взять за основу.)

Теорема. *Локально компактная абелева группа G компактна тогда и только тогда, когда $H^2(G, X) = 0$ для любого банахова G -модуля X .*

Для компактной G $L^1(G)$ -модуль $\mathbb{C}$, как легко усмотреть, проективен; отсюда $\text{Ext}^n(\mathbb{C}, X) = 0$ для любых $n > 0$ и X . Тем самым необходимость установлена; вся оставшаяся часть работы посвящена доказательству достаточности.

Предположим, что G не компактна; тогда ее группа характеров $\hat{G}$ не дискретна, и максимальный идеал $I = \{f \in L^1(G) : \int_G f(g)dg = 0\}$, соответствующий единичному характеру s_0 , не является изолированной точкой

в $\hat{G}$. Обозначим через $L_+^1(G)$ результат присоединения к $L^1(G)$ единицы и через I_+ — максимальный идеал в $L_+^1(G)$, соответствующий характеру s_0 . Для любой последовательности $s_n \in \hat{G}$ зададим в пространстве c_b всех ограниченных комплекснозначных последовательностей с равномерной нормой структуру $L^1(G)$ -модуля, положив для $a = \{a_n\} \in c_b$ $f \cdot a = \{\hat{f}(s_n) a_n\}$, где $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$. Тогда на основании основной теоремы работы ⁽¹⁾ в ее уточненной формулировке (§ 9), рассмотренной для $A = I_+$, выполнено по крайней мере одно из следующих утверждений:

I) существует одномерный $L^1(G)$ -модуль X , такой, что $\text{dh } X \geq 1$;

II) существует сходящаяся к s_0 последовательность $s_n \in \hat{G}$ такая, что для $L^1(G)$ -модуля $c_e = I_+ \otimes_{L^1(G)} c_b$ $\text{dh } c_e \geq 1$;

III) существует сходящаяся к s_0 последовательность $s_n \in \hat{G}$ такая, что для идеала $M = \{f \in L^1(G): \hat{f}(s_n) = 0\}$ и фактор-модуля $B = I_+ / M$ $\text{Ext}^2(c_b, B \otimes c_e) \neq 0$.

Покажем, что в случае, когда двумерные когомологии группы G тривиальны, ни одно из этих утверждений не может иметь места. Напомним ⁽⁸⁾, что для любого банахова пространства E проективное тензорное произведение $L^1(G) \otimes E$ изометрически изоморфно пространству $L_E^1(G)$ интегрируемых E -значных функций на G ; в частности, $L^1(G) \otimes L^1(G) = L^1(G^2)$.

1) Л е м м а 1. $L^1(G)$ — проективный $L^1(G)$ -модуль.

Пусть $\chi(g)$ — характеристическая функция некоторого подмножества меры Хаара 1 в G . Рассмотрим морфизм $L^1(G)$ -модулей $\rho_0: L^1(G) \rightarrow L^1(G^2) = L^1(G) \otimes L^1(G)$ такой, что $[\rho_0(f)](g_1, g_2) = \chi(g_2) f(g_1 g_2)$. Как легко видеть, композиция ρ_0 с каноническим морфизмом ⁽²⁾ тождественна на $L^1(G)$, а это означает проективность $L^1(G)$.

Для G -модуля X обозначим через $\pi_X: L_X^1(G) = L^1(G) \otimes X \rightarrow X$ морфизм, определенный формулой $\pi_X(\bar{f}) = \int_G g \cdot \bar{f}(g) dg$, $\bar{f} \in L_X^1(G)$. Из очевидной связи π_X с каноническим морфизмом и леммы 1 немедленно следует

Л е м м а 2. G -модуль X является проективным $L^1(G)$ -модулем тогда и только тогда, когда существует морфизм $\rho_X: L^1(G)$ -модулей такой, что $\pi_X \rho_X = 1_X$.

Для характера $s \in \hat{G}$ обозначим через I_s соответствующий максимальный идеал в $L^1(G)$, а через T_s — автоморфизм алгебры $L^1(G)$ такой, что $[T_s f](g) = s^{-1}(g) f(g)$, $f \in L^1(G)$; очевидно, T_s изометрически отображает I на I_s . Тем самым определен изометрический оператор $U_s = T_s \otimes T_s: L_I^1(G) = L^1(G) \otimes I \rightarrow L_{I_s}^1(G) \otimes I_s = L_{I_s}^1(G)$.

Л е м м а 3. Для любого $s \in \hat{G}$ идеал I_s проективен.

Ввиду $C = L^1(G) / I$, тривиальность двумерных когомологий группы G означает, что I проективен; следовательно, существует $\rho = \rho_I$, обладающий свойством, указанным в предыдущей лемме. Но тогда, как легко видеть, $\rho_s = U_s \rho T_s^{-1}: I_s \rightarrow L_{I_s}^1(G)$ — морфизм $L^1(G)$ -модулем такой, что $\pi_{I_s} \rho_s = 1_{I_s}$. Согласно лемме 2, наше утверждение доказано.

Для всякого одномерного $L^1(G)$ -модуля X либо $X = L^1(G) / I_s$ для некоторого $s \in \hat{G}$, либо $X = L_+^1(G) / L^1(G)$. Поэтому из лемм 1 и 3 следует, что всегда $\text{dh } X \leq 1$, и утверждение (I) не имеет места.

II) Пусть c_b — $L^1(G)$ -модуль, построенный с помощью сходящейся к s_0 последовательности $s_n \in \hat{G}$; обозначим через c подмодуль в c_b , состоящий из последовательностей, сходящихся к нулю. Условимся писать далее I_n , T_n , U_n и ρ_n вместо I_{s_n} и т. п.

Л е м м а 4. С точностью до изоморфизма $L^1(G)$ -модулей $c_e = c$.

Доказательство немедленно следует из наличия в I ограниченной аппроксимативной единицы ⁽⁹⁾, § 34) и леммы 8.5 работы ⁽¹⁾.

Рассмотрим G -модуль $L_c^1(G) = L^1(G) \otimes c$; его элементы суть последовательности $u = \{u_n\}$, $u_n \in L^1(G)$, $\{u_n(g)\} \in c$ почти всюду такие, что $\int_G (\max_n |u_n(g)|) dg < \infty$. Пусть $J = \{u \in L_c^1(G) : u_n \in I\}$ и

$K = \{u \in L_c^1(G) : u_n \in I_n\}$; очевидно, $J = I \otimes c$ и $K = \text{Ker } \pi_c$. Обозначим через $V: J \rightarrow K$ изометрический оператор, (корректно) определенный формулой $V\{u_n\} = \{T_n u_n\}$.

Теперь возьмем G -модуль $L^1(G) \otimes L_c^1(G) = L_c^1(G^2)$ и рассмотрим его подмодули $L_J^1(G) = L^1(G) \otimes J$ и $L_K^1(G) = L^1(G) \otimes K$. Очевидно, $L_J^1(G)$ состоит из последовательностей вида $v = \{v_n\}$, $v_n \in L_I^1(G) = L^1(G) \otimes I \subset L^1(G) \otimes L^1(G) = L^1(G^2)$ и точно так же $L_K^1(G)$ — из последовательностей $w = \{w_n\}$, $w_n \in L_{I_n}^1(G)$. Поэтому формула $W\{v_n\} = \{U_n v_n\}$ корректно определяет изометрический оператор $W: L_J^1(G) \rightarrow L_K^1(G)$.

Лемма 5. K — проективный $L^1(G)$ -модуль.

Для проективного I возьмем $\rho: I \rightarrow L_I^1(G)$ такой, что $\pi_I \rho = 1_I$. Рассмотрим морфизм $\rho_J = \rho \otimes 1: J = I \otimes c \rightarrow L_I^1(G) \otimes c = L^1(G) \otimes (I \otimes c) = L^1(G) \otimes J = L_J^1(G)$ и оператор $\rho_K = W \rho_J V^{-1}: K \rightarrow L_K^1(G)$. Поскольку $\|\rho_K\| = \|\rho_J\| = \|\rho\|$ и для $u = \{u_n\} \in K$ $\rho_K(u) = \{\rho_n(u_n)\}$ (ρ_n — морфизмы, введенные при доказательстве леммы 3), ρ_K — морфизм $L^1(G)$ -модулей, причем, очевидно, $\pi_K \rho_K = 1_K$. Тем самым, согласно лемме 2, наше утверждение доказано.

Остается рассмотреть точную последовательность

$$0 \rightarrow K \rightarrow L_c^1(G) \xrightarrow{\pi_c} c \rightarrow 0.$$

Поскольку модули K и $L_c^1(G) = L^1(G) \otimes c$ проективны, а морфизм π_c , как легко видеть, допустим, она является допустимой проективной резольвентой $L^1(G)$ -модуля $c = c_e$ длины 1. Отсюда $\text{dh } c_e \leq 1$ и утверждение (II) не имеет места.

III) Для G -модулей X и Y пространство $\mathcal{B}(X, Y)$ всех ограниченных операторов из X в Y обладает, как известно, структурой G -бимодуля с действиями $[g \cdot \varphi](x) = g \cdot \varphi(x)$ и $[\varphi \cdot g](x) = \varphi(g \cdot x)$, $x \in X$, $g \in G$, $\varphi \in \mathcal{B}(X, Y)$. Введем в $\mathcal{B}(X, Y)$ новое левое действие группы, положив $g \circ \varphi = g \cdot \varphi \cdot g^{-1}$ (ср. ⁽¹⁰⁾ и ⁽⁵⁾); полученный G -модуль обозначен через $\mathcal{B}(X, Y)^0$.

Лемма 6. С точностью до изоморфизма $\text{Ext}^n(X, Y) = H^n(G, \mathcal{B}(X, Y)^0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку $\text{Ext}^n(X, Y) = H^n(L^1(G), \mathcal{B}(X, Y))$ (⁽²⁾, лемма 6.1), а пространства коцепей стандартного комплекса для вычислений последних когомологий суть $\mathcal{B}(L^1(G^n), \mathcal{B}(X, Y)) = \mathcal{B}(L^1(G^n) \otimes X, Y) = \mathcal{B}(L_X^1(G^n), Y)$ («сопряженная ассоциативность»), группы $\text{Ext}^n(X, Y)$ могут быть вычислены как когомологии комплекса

$$0 \rightarrow \mathcal{B}(X, Y) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{B}(L_X^1(G), Y) \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{B}(L_X^1(G^2), Y) \rightarrow \dots$$

с кограничными операторами, определенными с помощью формул

$$\begin{aligned} [\delta_n \psi](u) = & \int_G g \cdot [\psi(u(g, g_1, \dots, g_n))] dg + \sum_{K=1}^n (-1)^K \int_G \psi(u(g_1, \dots \\ & \dots, g, g^{-1}g_K, \dots, g_n)) dg + (-1)^{n+1} \int_G \psi(g \cdot u(g_1, \dots, g_n, g)) dg, \end{aligned}$$

где $u \in L_X^1(G^{n+1})$ и $\psi \in \mathcal{B}(L_X^1(G^n), Y)$, $n = 0, 1, \dots$. Аналогично, группы $H^n(G, \mathcal{B}(X, Y)^0) = \text{Ext}^n(C, \mathcal{B}(X, Y)^0)$ могут быть вычислены как когомологии комплекса, состоящего из тех же коцепей, однако с другими кограничными операторами δ_n^0 ; $n = 0, 1, \dots$, определенными формулами

$$\begin{aligned}
[\delta_n^0 \psi](u) = & \int_G g \cdot [\psi(g^{-1} \cdot u(g, g_1, \dots, g_n))] dg + \\
& + \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_G \psi(u(g_1, \dots, g, g^{-1}g_k, \dots, g_n)) dg + \\
& + (-1)^{n+1} \int_G \psi(u(g_1, \dots, g_n, g)) dg.
\end{aligned}$$

Сопоставим каждому $\psi \in \mathcal{B}(L_X^1(G^n), Y)$ элемент $\kappa_n(\psi)$ того же пространства, определенный равенством $[\kappa_n(\psi)](u) = \psi[(g_1 \dots g_n)^{-1} u(g_1, \dots, g_n)]$; очевидно, κ_n — изоморфизм линейных пространств, причем, как нетрудно проверить, $\kappa_n \delta_n = \delta_n^0 \kappa_{n-1}$, $n = 0, 1, \dots$. Таким образом, семейство $\kappa = \{\kappa_n\}$ является изоморфизмом обоих комплексов; следовательно, их когомологии совпадают. Лемма доказана.

Как легко видеть, для последовательности s_n , заключенной внутри некоторого компакта в $\tilde{G}$, $L^1(G)$ -модули c_b и $B \otimes c_e$ суть также и G -модули. Отсюда на основании предыдущей леммы $\text{Ext}^2(c_b, B \otimes c_e) = 0$ и утверждение (III) не имеет места.

Конец доказательства. Итак, для группы с тривиальными двумерными когомологиями ни одно из утверждений (I) — (III) не имеет места; в то же время для некомпактной группы хотя бы одно из них выполнено. Тем самым достаточность установлена, и теорема полностью доказана.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Я. Хелемский, Сборн. тр. каф. теор. функц. и функц. анализ. МГУ, 1, 1972. ² А. Я. Хелемский, Матем. сборн., 83 (125), № 2 (10) (1970). ³ Н. Kaimowitz, Trans. Am. Math. Soc., 102, № 2 (1962). ⁴ A. Guichardet, C. R., 262, A38 (1966). ⁵ B. E. Johnson, Cohomology in Banach Algebras, 1970, Preprint. ⁶ A. Guichardet, C. R., 262, A118 (1966). ⁷ А. Картан, С. Эйленберг. Гомологическая алгебра, М., 1960. ⁸ A. Grothendieck, Mem. Am. Math. Soc., 16 (1955). ⁹ М. А. Наймарк, Нормированные кольца, М., 1968. ¹⁰ С. Маклейн, Гомология, М., 1966.