

Ф. В. ШИРОКОВ, В. А. СИГНАЕВСКИЙ

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОКРЫТИЯ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 11 IV 1972)

Понятие минимального покрытия конечного множества возникает во многих комбинаторных задачах, в которых рассматриваются покрытия, обладающие экстремальными в некотором смысле свойствами ⁽¹⁾. В данной работе получены разнообразные соотношения для чисел минимальных покрытий конечного множества X , состоящего из n элементов (точек).

Мы называем *классом* множество, элементами которого служат подмножества X . Множество, элементами которого служат классы, будем называть *системой*. Класс α подмножеств X называется *покрытием* X , если каждая точка x из X содержится хотя бы в одном элементе этого класса. Покрытие *минимально*, если при отбрасывании любого из его элементов оно перестает быть покрытием. *Кратностью* $\kappa_\alpha(x)$ точки x относительно класса α называется число всех элементов из α , содержащих x .

Пусть $Y \subset X$ и пусть α и β — классы подмножеств X и Y соответственно. Назовем класс β *следом* класса α на Y , если $\beta = \{A \cap Y | A \in \alpha\}$.

В произвольном классе α подмножеств X можно определить с помощью $Y \subset X$ отношение эквивалентности: $A_1 \sim A_2$ тогда и только тогда, когда $A_1 \cap Y = A_2 \cap Y$. Отбросим класс тех эквивалентных элементов, для которых $A \cap Y = \emptyset$, а в каждом из оставшихся классов выберем по представителю. Полученный класс обозначим через α^* . При выводе последующих соотношений используется лемма:

Лемма. Для того чтобы класс β — след на Y минимального покрытия α множества X — был минимальным покрытием Y , необходимо и достаточно, чтобы в Y^* попадало не менее чем по одной точке с кратностью $\kappa_{\alpha^*}(x) = 1$ из каждого элемента A класса α^* .

Число всех минимальных покрытий $D(n)$ множества X разлагается в сумму чисел $D(n|q)$, $1 \leq q \leq n$, где под $D(n|q)$ понимается число всех минимальных покрытий X , состоящих из q подмножеств.

Теорема 1. Для чисел $D(n|q)$ справедливы следующие рекуррентные уравнения:

$$D(n|q) = (2^q - q - 1) D(n-1|q) + \sum_{k=1}^{n-q+1} \binom{n-1}{k-1} 2^{(k-1)(q-1)} D(n-k|q-1), \quad (1)$$

$$D(n|q) = (2^q - 1) D(n-1|q) + \sum_{k=1}^{n-q+1} \binom{n-1}{k-1} (2^{q-1} - 1)^{k-1} D(n-k|q-1), \quad (2)$$

$$D(n|q) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n-q+1} \binom{n}{k} [2^{(q-1)k} - (2^{q-1} - 1)^k] D(n-k|q-1); \quad (3)$$

два из них независимы, а третье является следствием двух других.

Теорема 2. Явное выражение для чисел $D(n|q)$ имеет вид

$$D(n|q) = \frac{1}{q!} \sum_{i=0}^q (-1)^i \binom{q}{i} (2^q - 1 - i)^n = \frac{1}{q!} \Delta^q x^n \Big|_{x=2^q-1}, \quad (4)$$

где Δ — разностный оператор: $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$.

Теорема 3. Справедливы соотношения

$$D(n|q) = \sum_{l=q}^n \binom{n}{l} (2^q - q - 1)^{n-l} S(l; q), \quad (5)$$

$$D(n|q) = \sum_{p=q}^{\min(n, 2^q-1)} \left\{ \binom{p}{q} \prod_{i=q+1}^p (2^q - i) \right\} S(n; p), \quad (6)$$

где $S(l; q)$ — числа Стирлинга второго рода. В формуле (6) значение

$\prod_{i=q+1}^p (2^q - i)$ при $p = q$ по определению полагается равным 1.

Замечание. По всякому покрытию α можно построить некоторое разбиение π , пересекая элементы α и их дополнения и беря в качестве атомов π наименьшие непустые такие пересечения. Число $V(p, q) =$

$\binom{p}{q} \prod_{i=q+1}^p (2^q - i)$ есть число тех минимальных q -элементных покрытий множества из p точек, у которых атомы разбиения π одноточечные.

Соотношения (5) и (6) дают как следствие линейную связь («нематричного» характера) между числами Стирлинга второго рода.

Теорема 4. Экспоненциальная производящая функция $h_q(z)$ для чисел $D(n|q)$ имеет вид

$$h_q(z) = \frac{1}{q!} e^{(2^q - q - 1)z} (e^z - 1)^q. \quad (7)$$

Определение. Пусть дан формальный степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Функцию $\varphi(z)$ назовем *обобщенной производящей функцией для чисел a_n* , если она удовлетворяет двум условиям: 1) функция $\varphi(z)$ аналитична в полукруге $\operatorname{Re} z < 0$, $|z| < \rho$ достаточно малого радиуса и непрерывна вместе со всеми своими производными в замкнутом полукруге; 2) формальный ряд Маклорена $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} z^n$, где $\varphi^{(n)}(0)$ вычисляются при дви-

жении к 0 из левой полуплоскости, совпадает с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Элементы A и B произвольного класса α будем называть *сцепленными*, если существует последовательность элементов $A_1, \dots, A_s$ из α такая, что $A_1 = A$, $A_s = B$ и $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \dots, s-1$. Введенное отношение является эквивалентностью в α , и α распадается на непересекающиеся классы элементов $\alpha = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_r$ — *компоненты связности*. При $r = 1$ класс α называется *связным*.

Обозначим через $D(n|q, r)$ число всех минимальных q -элементных покрытий, имеющих r компонент связности.

Теорема 5. Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$qD(n|q, r) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \binom{n}{i} j D(i|j, 1) D(n-i|q-j, r-1), \quad (8)$$

$$rD(n|q, r) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \binom{n}{i} D(i|j, 1) D(n-i|q-j, r-1). \quad (9)$$

Теорема 6. Функциональный ряд $\sum_{q=1}^{\infty} h_q(z)$ сходится абсолютно и равномерно в полукруге $\operatorname{Re} z \leq 0$, $|z| \leq \rho$, достаточно малого радиуса. Так же сходится и любой из его производных рядов. Сумма $h(z)$ этого ряда служит обобщенной производящей функцией для чисел $D(n)$.

Положим

$$h_{q,r}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D(n|q,r)}{n!} z^n, \quad h_{\cdot,r}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} h_{q,r}(z).$$

Теорема 7. Функция $h_{\cdot,1}(z)$ аналитична в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и дается формулой

$$h_{\cdot,1}(z) = \lg h(z) \quad (10)$$

в полукруге $\operatorname{Re} z \leq 0$, $|z| \leq \rho$, достаточно малого радиуса. Функция $h_{\cdot,r}(z)$ аналитична в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и всюду связана с $h_{\cdot,1}(z)$ формулой

$$h_{\cdot,r}(z) = \frac{1}{r!} [h_{\cdot,1}(z)]^r. \quad (11)$$

Функция $h_{\cdot,r}(z)$, $r = 1, 2, \dots$ служит обобщенной производящей функцией для чисел $D(n|\cdot, r)$.

Теорема 8. Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{D(s)}{s!} = \sum_{1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + n \cdot k_n = s} \frac{[D(1|\cdot, 1)]^{k_1} [D(2|\cdot, 1)]^{k_2} \dots [D(n|\cdot, 1)]^{k_n} \dots}{k_1! k_2! \dots k_n! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n} \dots}, \quad (12)$$

$$\frac{D(s|\cdot, 1)}{s!} = \sum_{k=1}^s \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = s} \frac{D(n_1) D(n_2) \dots D(n_k)}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad (13)$$

$$h_s(z) = \sum_{1 \cdot k_1 + \dots + n \cdot k_n = s} \frac{[h_{1,1}(z)]^{k_1} \dots [h_{n,1}(z)]^{k_n} \dots}{k_1! \dots k_n! \dots}, \quad (14)$$

$$h_{s,1}(z) = \sum_{k=1}^s \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{n_1 + \dots + n_k = s} h_{n_1}(z) \dots h_{n_k}(z). \quad (15)$$

Теорема 9 (аналог теоремы 3). Справедливы соотношения

$$D(n|q, 1) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \Phi(n-l, q) S(l; q), \quad (16)$$

$$D(n|q, 1) = \sum_{p=q}^n F(p, q) S(n; p); \quad (17)$$

здесь $\Phi(l, q)$ и $F(p, q)$ — целые неотрицательные числа, имеющие простой комбинаторный смысл.

Подобно формулам (5) и (6), формулы (16) и (17) дают линейную связь для чисел Стирлинга второго рода.

Определение. Разбиение $\{Y, Z\}$ множества X разлагает класс β , если любое подмножество $B \in \beta$ входит целиком в Y или в Z .

Обозначим через $\wp(X)$ класс всех подмножеств X , а через $\wp\wp(X)$ — систему всех подклассов класса $\wp(X)$. Рассмотрим некоторый «способ выделения» из $\wp\wp(X)$ подсистемы $\Theta(X)$, удовлетворяющий двум требованиям:

А) Он инвариантен по отношению к перенумерации точек.

Пусть $\{Y, Z\}$ — произвольное разбиение множества X и пусть $\Theta(Y, Z)$ — система всех классов θ из $\Theta(X)$, разлагаемых разбиением $\{Y, Z\}$.

Б) След каждого $\theta \in \Theta(Y, Z)$ на Y принадлежит системе $\Theta(Y)$ и каждый класс из $\Theta(Y)$ является следом некоторого класса из $\Theta(Y, Z)$.

Обозначим через $\Theta_r(X)$, $r = 1, 2, \dots$ систему всех классов с r компонентами связности в системе $\Theta(X)$ и положим $P(n) = |\Theta(X)|$ и $P(n|r) = |\Theta_r(X)|$, где символ $|\cdot|$ обозначает число элементов соответствующей системы ($|X| = n$). По определению, $P(0) = P(0, 0) = 1$, $P(n, 0) = P(0, r) = 0$ при $n, r > 0$.

Теорема 10. Формальные степенные ряды

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n \quad \text{и} \quad p_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n|r)}{n!} z^n, \quad r = 1, 2, \dots,$$

связаны между собой равенствами

$$p_r(z) = \frac{1}{r!} [\lg p(z)]^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Из теоремы 10 вытекают некоторые результаты статьи ⁽²⁾.

Систему $\Theta(X)$ можно интерпретировать как систему всех минимальных баз топологий на конечном множестве X . Тогда теорема 10 дает связь между экспоненциальными производящими функциями для числа всех топологий на конечном множестве и для числа всех «связных» топологий. Имеются и другие интерпретации теоремы 10, связанные с графами и т. п.

Пусть $\rho(\theta)$ — функция класса $\theta \in \Theta(X)$. Мы скажем, что $\rho(\theta)$ мультипликативна, если для любого разбиения $\{Y, Z\}$, разлагающего класс $\theta \in \Theta(X)$, выполняется равенство $\rho(\theta) = \rho(\theta \cap Y) \cdot \rho(\theta \cap Z)$. Положим

$$P(n) = \sum_{\theta \in \Theta(X)} \rho(\theta), \quad P(n|r) = \sum_{\theta \in \Theta_r(X)} \rho(\theta), \quad |X| = n.$$

Теорема 11. При таком определении чисел $P(n)$ и $P(n|r)$ для соответствующих степенных рядов справедливы соотношения (18).

Числа $P(n)$ и $P(n|r)$ — нечто вроде «интегралов» от мультипликативной функции $\rho(\theta)$ по соответствующим системам.

Московский
энергетический институт

Поступило
30 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. L. Lawler, SIAM J. Appl. Math., **14**, № 5, 1115 (1966). ² A. Rényi, A Magyar tud. Akad. Mat. és fiz. tud. oszt. Közl., **16**, № 1, 77 (1966).