Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 3

УДК 517.946.9 *МАТЕМАТИКА*

Э. М. СААК

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 24 IV 1972)

Целью работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Задача Дирихле для эллиптического уравнения*

$$Au = 0 \tag{1}$$

порядка $2m$ с постоянными коэффициентами устойчива в области E, если в E устойчива задача Дирихле для m-гармонического уравнения.

Что касается последнего вопроса, то для $m = 1$ он полностью решен М. В. Келдышем ([1]), а для $m \geqslant 1$ (при двух переменных) — в работе автора ([2]).

Рассматривается n-мерное эвклидово пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с вещественными координатами $x_1, \ldots, x_n$.

Оператор A нам будет удобно записать в виде

$$Au = \sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n}} \frac{\partial^{|\nu|} u}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}, \tag{2}$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, коэффициенты $a_{\mu\nu}$ — постоянные, причем

$$a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Этому условию всегда можно удовлетворить, введя в случае надобности новые коэффициенты $\tilde{a}_{\mu\nu}$ по формулам

$$\tilde{a}_{\mu\nu} = {}^1/_2 (a_{\mu\nu} + a_{\nu\mu}).$$

Например, чтобы записать в виде (2) полигармонический оператор Δ^m, где Δ — оператор Лапласа, следует положить $a_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$, $a_{\mu\mu} = m! / (\mu_1! \ldots \mu_n!)$.

Область E считается ограниченной и через $L_2^{(m)}(E)$ обозначается гильбертово пространство классов вещественных суммируемых по $\bar{E}$ функций $u(x)$, $v(x)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_E^{(m)} = \int\limits_E \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \frac{m!}{k_1! \ldots k_n!} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^m v}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} dx, \tag{4}$$

где производные понимаются в смысле С. Л. Соболева, а интеграл — в смысле Лебега. К одному классу относятся все функции, отличающиеся лишь на многочлен степени $(m-1)$.

Через $AL_2^{(m)}(E)$ будем обозначать подпространство пространства $L_2^{(m)}(E)$, состоящее из классов функций, являющихся решениями уравнения (1) в области E.

Оператор (2) порождает следующий билинейный функционал в $L_2^{(m)}(E)$:

$$\langle u, v\rangle_E^{(A)} = \int\limits_E \sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu\nu} \frac{\partial^{|\mu|}u}{\partial x_1^{\mu_1}\ldots\partial x_n^{\mu_n}} \frac{\partial^{|\nu|}v}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\, dx. \tag{5}$$

В силу (3), этот функционал симметричен:

$$\langle v, u\rangle_E^{(A)} = \langle u, v\rangle_E^{(A)},$$

и, значит, его можно принять за новое скалярное произведение в пространстве $L_2^{(m)}(E)$.

В силу эллиптичности оператора A норма, порождаемая скалярным произведением (5), эвивалентна норме, порождаемой скалярным произведением (4). Таким образом, оператор A порождает автоморфизм пространства $L_2^{(m)}(E)$, который мы будем обозначать через $\tilde{A}$:

$$\langle \tilde{A}u, v\rangle_E^{(m)} = \langle u, v\rangle_E^{(A)}, \quad u, v \in L_2^{(m)}(E). \tag{6}$$

Лемма 1. *При автоморфизме $\tilde{A}$ подпространство $AL_2^{(m)}(E)$ отображается на подпространство $\Delta^m L_2^{(m)}(E)$.*

Доказательство. Условимся говорить, что элемент $u \in L_2^{(m)}(E)$ равен нулю на подобласти $e \subset E$, если он равен нулю как элемент пространства $L_2^{(m)}(e)$. Обозначим через $N_m L_2^{(m)}(E)$ замыкание в $L_2^{(m)}(E)$ множества элементов, равных нулю в окрестности границы области E. Можно показать, что ортогональным дополнением к $N_m L_2^{(m)}(E)$ служит пространство $\Delta^m L_2^{(m)}(E)$. Если $u \in AL_2^{(m)}(E)$, то, интегрируя по частям, убедимся, что $\langle \tilde{A}u, v\rangle_E^{(m)} = 0$ для любого $v \in N_m L_2^{(m)}(E)$. Следовательно, $\tilde{A}$ — образ пространства $AL_2^{(m)}(E)$ лежит в $\Delta^m L_2^{(m)}(E)$. Покажем, что имеет место совпадение. Пусть $w \in \Delta^m L_2^{(m)}(E)$ и $\tilde{A}u = w$. Тогда $\langle \tilde{A}u, v\rangle_E^{(m)} = 0$ для любого $v \in N_m L_2^{(m)}(E)$ и, следовательно, u является слабым (а значит, и обычным) решением уравнения $Au = 0$, т. е. $u \in AL_2^{(m)}(E)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{E_k\}$ — убывающая последовательность областей, сходящаяся к E в том смысле, что $E_k \supset \bar{E}$, но $\cap E_k = \bar{E}$. Пусть $\tilde{A}_k$ есть автоморфизм $L_2^{(m)}(E_k)$, соответствующий области E_k.*

Тогда для любой всюду бесконечно гладкой функции $f(x)$ элементы $\tilde{A}_k f$ сходятся в пространстве $L_2^{(m)}(E)$ при $E_k \to E$ к элементу $\tilde{A}f$.

Доказательство. В силу эллиптичности оператора A для норм операторов $\tilde{A}_k$ имеем оценки

$$0 < c_1 \leqslant \|\tilde{A}_k\| \leqslant c_2 < \infty,$$

где c_1, c_2 не зависят от k. Это вызывает слабую компактность последовательности $\tilde{A}_k f$ в пространстве $L_2^{(m)}(E)$. Использование (6) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега позволяет установить теперь слабую сходимость последовательности $\tilde{A}_k f$ к $\tilde{A}f$, а также неравенство

$$\overline{\lim_{E_k \to E}} \|\tilde{A}_k f\|_E^{(A)} \leqslant \|\tilde{A}f\|_E^{(A)},$$

где $\|f\|_E^{(A)} = \{\langle f, f\rangle_E^{(A)}\}^{1/2}$. Отсюда по известному свойству гильбертовых пространств вытекает сходимость по норме. Лемма 2 доказана.

Оператор P для области E определим соотношением

$$\langle u, Pf\rangle_E^{(m)} = \langle u, f\rangle_E^{(m)}, \quad f \in L_2^{(m)}(E), \quad Pf \in \Delta^m L_2^{(m)}(E), \tag{7}$$

где u — произвольный элемент из $\Delta^m L_2^{(m)}(E)$. Оператор P, соответствующий области E_k, будем обозначать через P_k.

Лемма 3. *Оператор* $P^{(A)} = \tilde{A}^{-1}P\tilde{A}$ *проектирует пространство* $L_2^{(m)}(E)$ *на подпространство* $AL_2^{(m)}(E)$.

Доказательство. Что $P^{(A)}$ — проектор, легко вытекает из того, что таковым является оператор P. Включение $P^{(A)}f \in AL_2^{(m)}(E)$ для любого $f \in L_2^{(m)}(E)$ следует из леммы 1. Соотношение $P^{(A)}u = u$ для $u \in AL_2^{(m)}(E)$ также проверяется при помощи леммы 1.

Лемма 4. *Если в области* E *устойчива задача Дирихле для* m*-гармонического уравнения, то, какова бы ни была всюду бесконечно гладкая функция* $f(x)$, *элементы* $P_k^{(A)}f$ *слабо сходятся в пространстве* $L_2^{(m)}(E)$ *при* $E_k \to E$ *к элементу* $P^{(A)}f$.

Доказательство. Можно показать, что устойчивость задачи Дирихле для m-гармонического уравнения (определение см. в [2]) равносильна слабой сходимости элементов P_kf к Pf при $E_k \to E$ для любой всюду бесконечно гладкой функции $f(x)$. Учитывая, что $P_k^{(A)} = \tilde{A}_k^{-1}P_k\tilde{A}_k$, имеем

$$P_k^{(A)}f - P^{(A)}f = \tilde{A}_k^{-1}P_k(\tilde{A}_k - \tilde{A})f + \tilde{A}_k^{-1}(P_k - P)\tilde{A}f + (\tilde{A}_k^{-1} - \tilde{A})P\tilde{A}f. \qquad (8)$$

Для элементов $\tilde{A}_k^{-1}f$, где $\tilde{A}_k^{-1}$ — обратное отображение к $\tilde{A}_k$, имеет место предложение, вполне аналогичное лемме 2. Таким образом, слагаемые в правой части (8) слабо сходятся к нулю в $L_2^{(m)}(E)$, когда $E_k \to E$, что и доказывает лемму.

Лемма 5. *Если в области* E *устойчива задача Дирихле для* m*-гармонического уравнения, то функции, являющиеся решением уравнения* (1) *в окрестности* $\bar{E}$, *образуют плотное множество в пространстве* $AL_2^{(m)}(E)$.

Доказательство. Элементы вида $P^{(A)}f$, где $f(x)$ — всюду бесконечно гладкая функция, образуют плотное множество в пространстве $AL_2^{(m)}(E)$ в силу леммы 3 и известного свойства пространства $L_2^{(m)}(E)$. Поэтому лемма 5 вытекает из леммы 4.

Доказательство теоремы производится теперь при помощи леммы 5 и рассмотрения воспроизводящих функций аналогично тому, как это сделано в [2].

Примечание. Выше рассматривался эллиптический оператор A без младших членов. Один из результатов работы [3] позволяет утверждать, что устойчивость задачи Дирихле от наличия младших членов не зависит.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило
3 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, УМН, 8, 171 (1941). [2] Э. М. Саак, ДАН, 198, № 4, 772 (1971). [3] Э. М. Саак, Укр. матем. журн., 18, № 6, 26 (1966).