Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 517.925 *МАТЕМАТИКА*

С. Д. ЩУКО

К ПРОБЛЕМЕ РАЗЛИЧЕНИЯ ЦЕНТРА И ФОКУСА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 X 1971)

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + \sum_{m=2}^{n} P_m(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = x + \sum_{m=2}^{n} Q_m(x, y), \tag{1}$$

где $P_m(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ — однородные полиномы степени m.

Начало координат фазовой плоскости xy является для системы (1) особой точкой типа центра или фокуса. Условием центра является обращение в нуль всех ляпуновских величин. Известные методы различения центра и фокуса требуют вычисления конечного, иногда достаточно большого, числа ляпуновских или им эквивалентных величин. Эта весьма трудоемкая работа может быть проделана с помощью ЭЦВМ. Для вычислений удобны методы, позволяющие осуществлять внутренний контроль вычислений в силу симметрии получающихся выражений. Это реализуется при переходе к комплексно сопряженным переменным [1].

2. Система (1) преобразуется в

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -\frac{\bar{z} + Z(z, \bar{z})}{z + \bar{Z}(z, \bar{z})}, \tag{2}$$

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy; \quad Z(z, \bar{z}) = \sum_{m=2}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{k, m} z^k \bar{z}^{m-k}.$$

Наличие центра в начале координат равносильно существованию голоморфного интеграла

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \Phi_{k, m-k} z^k \bar{z}^{m-k} \tag{3}$$

уравнения

$$L(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dt} = 0. \tag{4}$$

Функции $\Phi(z, \bar{z})$ сопоставляется последовательность $(m+1)$-мерных комплексных векторов Φ_m с компонентами, являющимися коэффициентами однородных полиномов степени m из (3):

$$\Phi_m = \{\Phi_{0, m}; \Phi_{1, m-1}; \ldots; \Phi_{m-1, 1}; \Phi_{m, 0}\}.$$

Для того чтобы в начале координат был центр системы (1), необходимо и достаточно [2], чтобы векторное уравнение (4) имело решение $\Phi = \{\Phi_m\}$, удовлетворяющее условиям

$$\Phi_{0,0} = \Phi_{0,1} = \Phi_{1,0} = \Phi_{0,2} = \Phi_{2,0} = 0,$$
$$\Phi_{1,1} = 1,$$
$$\Phi_{k,\,m-k} = \overline{\Phi}_{m-k,\,k},$$
$$\Phi_{k,k} = 0, \quad k \geqslant 2.$$

Векторы Φ_m находятся по рекуррентной формуле

$$\Phi_m = -C_{m,m}^{-1}\left\{\sum_{l=2}^{m-1} C_{m,l}\Phi_l\right\}, \quad m > 2. \tag{5}$$

Здесь $C_{m,l} = \{c_{rs}^{(m,l)}\}$ — матрица из $m+1$ строк и $l+1$ столбцов, причем

$$c_{rs}^{(m,l)} = (l-s)\,a_{r-s,\,m-l+1} + s\bar{a}_{m-l-r+s,\,m-l+1},$$

где r — номер строки, s — номер столбца, $C_{m,m}^{-1}$ — квадратная диагональная $(m+1)$-матрица с элементами вида

$$\begin{cases} -\dfrac{i\delta_{rs}}{m-2s} & \text{при} \quad m \neq 2s; \ \delta_{rs} \text{ — символ Кронекера;} \\ 0 & \text{при} \quad m = 2s. \end{cases}$$

Ляпуновские величины имеют тогда вид

$$\alpha_{2k+1} = i\sum_{l=2}^{2k-1} T_{2k,\,l}\Phi_l,$$

где $T_{2k,\,l}$ — средняя строка матрица $C_{2k,\,l}$.

Поскольку все элементы матриц, входящих в (5), содержат мнимую единицу i множителем, вектор Φ_m не будет иметь мнимого множителя.

3. При реализации алгоритма следовало учесть особенности, вытекающие из существа поставленной задачи: необходимость проведения действий над полиномами, коэффициенты которых являются обыкновенными дробями, и невозможность приближенного представления этих дробей как в записи исходной информации, так и на всех промежуточных этапах. Этим требованиям не удовлетворяют известные методы выполнения действий над полиномами с помощью ЭЦВМ ([3-5]).

Для реализации алгоритма была построена арифметика обыкновенных дробей, сохраняющая целочисленность числителя и знаменателя. По составленной программе последовательно вычисляются ляпуновские величины, причем каждая следующая — в предположении равенства нулю всех предыдущих.

Как видно из (5), для построения вектора Φ_m необходимо хранить в оперативной памяти машины предыдущие векторы, что предъявляет определенные требования к объему памяти ЭЦВМ.

4. Описанный алгоритм был применен для вычисления ляпуновских величин систем типа (1) с помощью ЭЦВМ «БЭСМ-4».

а) Для системы

$$\frac{dx}{dt} = -y + P_3(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + Q_3(x, y),$$

приведенной к виду (2), где

$$Z(z, \bar{z}) = \alpha\bar{z}^3 + \beta z\bar{z}^2 + \gamma z^2\bar{z} + \delta z^3,$$

получены шесть последовательных ляпуновских величин

$$\alpha_3 = k_3(\beta - \bar{\beta}),$$
$$\alpha_5 = k_5(\alpha\gamma - \bar{\alpha}\bar{\gamma}),$$
$$\alpha_7 = k_7[(\alpha^2\delta - \bar{\alpha}^2\bar{\delta}) + {}^8/_3(\alpha\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\gamma\bar{\delta}) + (\gamma^2\bar{\delta} - \bar{\gamma}^2\delta)],$$

$$\alpha_9 = k_9[(\alpha\bar\gamma\delta - \bar\alpha\gamma\bar\delta) + {}^1/_3(\gamma^2\bar\delta - \bar\gamma^2\delta)]\bar\beta,$$

$$\alpha_{11} = k_{11}[(\alpha\bar\gamma\delta - \bar\alpha\gamma\bar\delta)({}^{207}/_4\bar\alpha\bar\gamma + \delta\bar\delta) +$$

$$+ (\gamma^2\bar\delta - \bar\gamma^2\delta)(-134\bar\alpha\bar\gamma + {}^{605}/_{12}\gamma\bar\gamma + {}^1/_3\delta\bar\delta)],$$

$$\alpha_{13} \equiv 0; \quad k_j = \text{const}.$$

Условия обращения в нуль величин α_{2k+1}, $k = 1, \ldots, 6$, эквивалентны достаточным условиям центра, данным в ([6]).

b) Для системы

$$\frac{dx}{dt} = -y + P_5(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = x + Q_5(x, y)$$

приведенной к виду (2), где

$$Z(z, \bar z) = \alpha\bar z^5 + \beta z\bar z^4 + \gamma z^2\bar z^3 + \delta z^3\bar z^2 + \varepsilon z^4\bar z + \zeta z^5,$$

первые три условия центра имеют вид

$$\alpha_3 \equiv k_3(\gamma - \bar\gamma) = 0,$$

$$\alpha_5 \equiv k_5[(\alpha\varepsilon - \bar\alpha\bar\varepsilon) + (\beta\delta - \bar\beta\bar\delta)] = 0,$$

$$\alpha_7 \equiv k_7[(\alpha\beta\zeta - \bar\alpha\bar\beta\bar\zeta) + {}^9/_2(\alpha\delta^2 - \bar\alpha\bar\delta^2) -$$

$$- {}^3/_2(\alpha\bar\beta\delta - \bar\alpha\beta\bar\delta) + {}^9/_2(\alpha\bar\delta\zeta - \bar\alpha\delta\bar\zeta) + {}^9/_2(\beta\bar\delta\varepsilon - \bar\beta\delta\bar\varepsilon) +$$

$$+ 3(\beta\bar\varepsilon\zeta - \bar\beta\varepsilon\bar\zeta) + {}^3/_2(\delta^2\bar\varepsilon - \bar\delta^2\varepsilon) + {}^5/_2(\delta\varepsilon\bar\zeta - \bar\delta\bar\varepsilon\zeta)] = 0; \quad k_j = \text{const}.$$

c) Для системы

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y),$$

приведенной к виду (2), где

$$Z(z, \bar z) = \alpha\bar z^2 + \beta z\bar z + \bar\alpha z^2 + \gamma\bar z^3 + \delta z\bar z^2 + \bar\delta z^2\bar z + \bar\gamma z^3,$$

первые три условия центра имеют вид

$$\alpha_3 \equiv k_3[(\alpha - \bar\alpha)\beta - (\delta - \bar\delta)] = 0,$$

$$\alpha_5 \equiv k_5[(\alpha - \bar\alpha)(\alpha\bar\gamma + \bar\alpha\gamma) + (\gamma - \bar\gamma)({}^3/_2\bar\alpha\beta + 3\beta^2 - {}^3/_2\bar\delta) +$$

$$+ (\delta - \bar\delta)(-2\alpha\bar\alpha - {}^9/_2\bar\alpha\beta - \beta^2 + {}^9/_2\bar\delta)] = 0,$$

$$\alpha_7 \equiv k_7[(\alpha^2 - \bar\alpha^2){}^1/_{12}\bar\delta^2 + (\gamma - \bar\gamma)({}^1/_{14}\alpha\bar\alpha\gamma + {}^1/_2\alpha\bar\alpha\bar\gamma - \alpha\bar\alpha\bar\delta +$$

$$+ {}^{19}/_2\bar\alpha^2\beta^2 + {}^1/_4\bar\alpha^2\gamma + {}^{229}/_4\bar\alpha\beta^3 + 3\bar\alpha\beta\gamma + {}^{27}/_8\bar\alpha\beta\bar\gamma -$$

$$- {}^{59}/_4\bar\alpha\beta\bar\delta + {}^{567}/_8\beta^4 + {}^3/_4\beta^2\gamma + {}^3/_2\beta^2\bar\gamma - {}^{127}/_4\beta^2\bar\delta + {}^2/_8\gamma\bar\gamma - {}^3/_8\gamma\bar\delta -$$

$$- {}^3/_4\bar\gamma\bar\delta + {}^{19}/_8\bar\delta^2) + (\delta - \bar\delta)(-{}^1/_2\alpha\bar\alpha\gamma + {}^{37}/_6\alpha\bar\alpha\bar\gamma + {}^1/_4\alpha\bar\alpha\delta +$$

$$+ {}^7/_{12}\alpha\bar\alpha\bar\delta - {}^{38}/_3\bar\alpha^3\beta - {}^{159}/_2\bar\alpha^2\beta^2 + {}^{37}/_6\bar\alpha^2\gamma - {}^{153}/_{12}\bar\alpha^2\delta +$$

$$+ {}^{151}/_{12}\bar\alpha^2\bar\delta - {}^{1363}/_{12}\bar\alpha\beta^3 + {}^{55}/_3\bar\alpha\beta\gamma + {}^{539}/_{24}\bar\alpha\beta\bar\gamma - {}^{293}/_6\bar\alpha\beta\delta +$$

$$+ {}^{989}/_{12}\bar\alpha\beta\bar\delta - {}^{189}/_8\beta^4 + \beta^2\gamma - {}^{25}/_4\beta^2\bar\gamma - {}^7/_6\beta^2\delta + {}^{425}/_4\beta^2\bar\delta +$$

$$+ {}^{21}/_4\gamma\bar\gamma - {}^{21}/_8\bar\gamma^2 + {}^3/_4\gamma\bar\delta + {}^{527}/_{24}\bar\gamma\delta - {}^{58}/_3\bar\gamma\bar\delta + {}^7/_{24}\delta\bar\delta - {}^{35}/_{12}\bar\delta^2)] = 0;$$

$$k_j = \text{const}.$$

Последние формулы показывают, в частности, что условия 1), приведенные в ([7]), не являются условиями центра, поскольку в этом случае $\alpha_5 \not\equiv 0$.

Третье условие центра, данное в ([8]), ошибочно, так как оно противоречит известным условиям, соответствующим частному случаю $Q_3(x, y) \equiv 0$ ([1]).

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступило 29 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Kapteyn, Verslag van de gewone vergaderingen der Wis-en natuurkundige afdeeling, mei, 1354—1365; November, 27—33 (1912). [2] К. Е. Малкин, Уч. зап. Рязанск. гос. пед. инст., 35, 151 (1963). [3] М. А. Чубаров, Цифровая вычислительная техника и программирование, в. 1, 172 (1966). [4] Т. Н. Смирнова, Проведение на ЭВМ типа М-20 полиномиальных выкладок с помощью прорабов, 1967. [5] Ю. В. Благовещенский, С. Б. Погребинский, Кибернетика, № 2, 71 (1971). [6] К. Е. Малкин, Волжский матем. сборн., в. 2, 87 (1964). [7] И. С. Куклес, ДАН, 42, № 4, 164 (1944). [8] И. С. Куклес, Тр. Самарск. гос. унив., № 107, 49 (1960).