Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 3

УДК 519.95

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. В. СОЛОДОВНИКОВ, В. Ф. БИРЮКОВ

О ПРИНЦИПЕ СЛОЖНОСТИ И МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 22 XII 1972)

Методы регуляризации, предложенные А. Н. Тихоновым ([1], [2]), имеют существенное значение для численных расчетов, реализуемых при помощи цифровых вычислительных машин, в самых различных областях науки и техники; в частности для синтеза оптимальных систем по критерию минимума среднего квадрата случайной ошибки в теории стохастического управления, приводящего в обычной постановке к некорректно поставленным вариационным задачам или некорректным операторным уравнениям, определяющим необходимые и достаточные условия экстремума. К подобным задачам относятся задачи Винера, Пелегрена, Заде и Рагацини, Бутона и др. ([3]). Поэтому, если иметь в виду применение цифровых вычислительных машин, то можно сказать, что для решения данных задач проблема оптимального управления до недавнего времени была лишь поставлена, но не решена.

Работы ([1], [2]), послужив исходным импульсом для работ ([4], [5]), привели, в частности, при решении задач оптимального стохастического управления к подходу (принцип минимальной сложности), отличающемуся от того, который изложен в ([1], [2]). Ниже рассматриваются особенности этого подхода, его связь и отличие от метода регуляризации ([2]).

Пусть $k(t)$ — импульсная переходная функция и $J(k)$ — функционал цели управления с областью определения Y, $J(k)$ — непрерывный, неотрицательный функционал. Для синтеза оптимальной системы должна решаться задача отыскания нижней грани функционала $J(k)$ на множестве Y:

$$\inf J(k), \qquad k \in Y. \tag{1}$$

Экстремальная задача (1) корректно поставлена, если она имеет и притом единственное решение $k_0(t)$ и всякая минимизирующая последовательность для функционала $J(k)$ сходится к $k_0(t)$.

Другой путь определения оптимальной импульсной переходной функции $k_0(t)$ — решение операторного уравнения, определяющего необходимые и достаточные условия экстремума (1). В статистической динамике систем автоматического управления подобные функциональные уравнения являются операторными уравнениями 1-го рода вида:

$$Ak = y. \tag{2}$$

Задача решения операторного уравнения корректно поставлена по Адамару, если решение существует, единственно и устойчиво относительно малых вариаций исходных данных.

При решении задачи оптимизации по принципу минимальной сложности, когда множество Q допустимых функций есть область определения функционала сложности $N(k)$, необходимо воспользоваться правилом множителей Лагранжа и минимизировать функционал

$$J_1(k) = N(k) + \lambda_1 J(k), \quad Q \subseteq Y, \tag{3}$$

где λ_1 — множитель Лагранжа ([4, 5]). Фиксируется то значение λ_1, при котором удовлетворяется функциональное уравнение $J(k) = \sigma$, где σ — допустимый уровень критерия качества системы.

Используя (3), установим связь принципа минимальной сложности с методом регуляризации некорректных вариационных задач А. Н. Тихонова в случае отсутствия сходимости минимизирующей последовательности к точному решению экстремальной задачи (1). При этом, согласно А. Н. Тихонову, минимизируется сглаживающий функционал

$$M(k) = J(k) + \alpha\Omega(k), \tag{4}$$

где $\Omega(k)$ — регуляризирующий (стабилизирующий) функционал, G — область определения $\Omega(k)$. Относительно $\Omega(k)$ предполагается, что он непрерывный, неотрицательный функционал, обладающий тем свойством, что при любом $d \geqslant 0$ множество $P_d = \{k\colon k \in G,\ \Omega(k) \leqslant d\}$ является компактным в Y и известно, что решение $k_0(t)$ исходной вариационной задачи минимизации $J(k)$ на множестве Y принадлежит G.

Функционал (3) при $\lambda_1 \neq 0$ легко трансформируется к виду функционала (4):

$$J_1^*(k) = J(k) + \alpha N(k), \tag{5}$$

где $\alpha = 1/\lambda_1$.

Для регуляризации экстремальной задачи (1), согласно методу, предложенному в ([1, 2]), необходимо было бы выбрать функционал $N(k)$ так, чтобы он обладал теми же свойствами, что и функционал $\Omega(k)$ в (4) и $\sigma = \sigma_0 = \inf J(k)$, $k \in Y$. При решении задач стохастического управления выполнение этих требований может быть связано с определенными трудностями. Для того чтобы выявить эти трудности, сравним подходы к решению задач оптимального управления на основе принципа минимальной сложности и на основе метода регуляризации.

1) В случае оптимизации по принципу минимальной сложности существование решения экстремальной задачи $\inf J(k)$, $k \in Y$, и принадлежность его множеству $Q \subseteq Y$, на котором определен функционал сложности $N(k)$, не требуется, между тем как в случае регуляризации должно быть известно, что указанное решение существует и принадлежит к Q.

В связи с этим возникает проблема доказательства теоремы существования и единственности, что может быть связано со значительными трудностями.

2) Если в методе регуляризации ([1, 2]) основная цель — построение приближенных решений (функций), сходящихся к точному решению $k_0(t)$ (этим и определяется выбор параметра регуляризации α), то при решении задачи по принципу минимальной сложности требуется обеспечить близость показателя качества (числа) к требуемому значению σ. Ясно, что первая задача сложнее, чем вторая.

3) Метод регуляризации может привести к физически нереализуемым решениям. Например, при синтезе линейных стационарных систем известно, что в случае, когда спектральные плотности рассматриваемых стационарных эргодических случайных процессов являются дробно-рациональными функциями, экстремум $J(k)$ достигается на множестве обобщенных функций. Поэтому, если применять метод регуляризации к решению этих задач, то область определения функционала $\Omega(k)$ также должна содержать обобщенные функции. Однако практически реализация оптимального оператора, содержащего обобщенные функции и их производные, затруднительна.

Поэтому при таком подходе для решения задачи синтеза необходимо после определения оптимального оператора аппроксимировать его оператором, допускающим практическую реализацию. Вряд ли целесообразно вначале отыскивать решение в более широком классе, например в классе, содержащем обобщенные функции, а затем аппроксимировать его желаемым оператором в более узком классе, не содержащем эти функции.

При применении принципа минимальной сложности делается сознательный отказ от множества всех допустимых функций, на которых определен функционал $J(k)$, к множеству, более узкому. При этом, как было указано выше, существование решения задачи минимизации $J(k)$ на Y и принадлежность его множеству Q (область определения функционала сложности $N(k)$) не предполагается.

Если экстремальная задача (1) имеет решение в L_2, то бывает необходимо дальнейшее сужение и этого класса, так как часто требуется учитывать неизменяемую часть системы (например, объекта управления) для физической реализуемости корректирующего контура.

4) В случае принципа минимальной сложности параметр регуляризации выбирается исходя из уравнения $J(k)=\sigma$, где σ — заданное значение показателя качества, между тем как в случае математического метода регуляризации параметр регуляризации α при возмущенных данных должен быть определенным образом согласован с величиной этих возмущений. Известные методы такого согласования, во-первых, требуют знания погрешности исходных данных, которую обычно трудно определить, во-вторых, процесс согласования сводится к многократному решению задачи при различных α или с различным набором исходных данных. Следовательно, такой подход сложен и при его алгоритмической реализации.

5) Функционал сложности $N(k)$ выбирается исходя из специфики рассматриваемой задачи управления и обеспечивает не только ее регуляризацию, но и минимизацию сложности.

Выбор регуляризующего функционала $\Omega(k)$ обусловлен лишь тем, чтобы обеспечить сходимость минимизирующей последовательности к точному решению $k_0(t)$ экстремальной задачи $\inf J(k)$.

Московское высшее техническое училище
им. Н. Э. Баумана

Поступило
22 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 6, № 4, 631 (1966). [2] А. Н. Тихонов, ДАН, **153**, № 1, 49 (1963). [3] В. В. Солодовников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, 1960. [4] В. В. Солодовников, В. Л. Ленский, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 11 (1966). [5] В. В. Солодовников, Изв. высш. учебн. завед., Приборостроение, **13**, № 3, 63 (1970).