В. А. АНТОНОВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ХОЛОДНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ
ГРАВИТИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 12 VI 1972)

В ⁽¹⁾ рассмотрена следующая модель. Большое число частиц, движущихся по круговым орбитам в одном направлении, образуют однородный цилиндр с плотностью ρ_0 . Для стационарности модели требуется угловая скорость вращения $\Omega = \sqrt{2\pi G\rho_0}$. Рассматривается устойчивость цилиндра по отношению к поперечным возмущениям. В ⁽¹⁾ сделан вывод об устойчивости, но он не точен, поскольку не выражены явно граничные условия и колебания изучены только в линейном приближении.

Рассмотрим колебания однородного цилиндра с конечным радиусом r_0 , но в нелинейной постановке, причем ограничимся случаем, когда заграничные координаты частиц линейно зависят от начальных координат x_0, y_0 :

$$x = \alpha(t)x_0 + \beta(t)y_0, \quad (1)$$

$$y = \gamma(t)x_0 + \delta(t)y_0.$$

Линейная зависимость (1) сохраняется все время, если ей подчиняются начальные скорости, так как преобразование типа (1) переводит круговой цилиндр в однородный эллиптический, внутри которого напряженность поля, как известно, линейно выражается через координаты. Уравнение поверхности $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$ переходит в

$$(\gamma^2 + \delta^2)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)xy = r_0^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2,$$

откуда для полуосей сечения $a(t)$ и $b(t)$ получаем

$$a^2 + b^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)r_0^2, \quad ab = (\alpha\delta - \beta\gamma)r_0^2. \quad (2)$$

В системе координат OXY , связанной с главными осями, потенциал эллиптического цилиндра во внутренней области берем в форме

$$\Phi = \frac{2GM}{a+b} \left(\frac{X^2}{a} + \frac{Y^2}{b} \right) + 2GM \ln(a+b), \quad (3)$$

где $M = \rho_0 r_0^2$, а для внешней области a и b следует заменить в (3) всюду соответственно на $\sqrt{a^2 + \lambda}$ и $\sqrt{b^2 + \lambda}$, где λ — положительный корень уравнения

$$\frac{X^2}{a^2 + \lambda} + \frac{Y^2}{b^2 + \lambda} = 1.$$

Указанные выражения потенциала можно получить как предельный случай из потенциала эллипсоида ⁽²⁾, но с некоторыми предосторожностями при выборе аддитивной константы, чтобы асимптотика на больших расстояниях

$$\Phi = GM(2 \ln 2R + 1) + O(1/R)$$

зависела только от полной массы M , но не от деформации цилиндра.

Интегрируя (3) по всему сечению с учетом изменившейся плотности, получаем потенциальную энергию (на единицу длины цилиндра)

$$U = GM^2 \left[\ln(a+b) + \frac{1}{2} \right] = \frac{\Omega^2 r_0^2 M}{4} \{ \ln [(\alpha + \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2] r_0^2 + 1 \}.$$

Следовательно, интеграл действия имеет вид

$$\frac{Mr_0^2}{4} \int \left\{ \frac{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2}{2} - \Omega^2 \ln [(\alpha + \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2] \right\} dt + \text{const.}$$

а уравнения движения

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\delta} = -2\Omega^2(\alpha + \delta)q^{-1}, \quad (4)$$

$$\ddot{\beta} = -\ddot{\gamma} = -2\Omega^2(\beta - \gamma)q^{-1},$$

где $q = (\alpha + \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2 = \left(\frac{a+b}{r_0} \right)^2$.

Из (4) следует

$$t = \frac{1}{2} \int \frac{dq}{\sqrt{cq - c_1 - 4\Omega^2 q \ln q}}, \quad (5)$$

причем ширина интервала, в котором подкоренное выражение положительно, стремится к нулю вместе с параметрами начального толчка. Таким образом, при не слишком сильных возмущениях $a + b$ изменяется периодически. Однако $\alpha - \delta$ и $\beta + \gamma$ оказываются совершенно произвольными линейными функциями времени, так что

$$\left(\frac{a-b}{r_0} \right)^2 = (c_2 t + c_3)^2 + (c_4 t + c_5)^2. \quad (6)$$

Соотношение (6) показывает, что любой начальный толчок, не удовлетворяющий специальному условию $c_2 = c_4 = 0$, приводит в конце концов систему к сингулярному состоянию $b = 0$. При малых возмущениях это происходит вблизи $a = 2r_0$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
13 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. С. Бисповатый-Коган, Я. Б. Зельдович и др., Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 3, 3 (1969). ² Н. И. Идельсон, Теория потенциала, М.—Л., 1936.