

УДК 517.947.5.37

МАТЕМАТИКА

В. И. ГОРБАЧУК, М. Л. ГОРБАЧУК

**О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ
ФУНКЦИЯМ ЭТОГО УРАВНЕНИЯ**

(Представлено академиком И. Н. Векуа 22 V 1972)

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, а $L_2(H, (a, b))$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, — гильбертово пространство вектор-функций $y(t)$, $t \in (a, b)$, со значениями в H , для которых $\int_a^b \|y(t)\|^2 dt < \infty$. Выберем в H какой-нибудь оператор I со свойствами: $I^* = I$, $I^2 = E$ (E — тождественный оператор) и рассмотрим дифференциальное выражение

$$l[y] = iI dy/dt + Ay + q(t)y, \quad (1)$$

где A — самосопряженный оператор в H , коммутирующий с I : $IA = AI$, а $q(t)$ — непрерывная в равномерной операторной топологии операторная функция, значениями которой являются самосопряженные ограниченные операторы в H . Кроме того, предполагается, что операторная функция $(A - \lambda E)q(t)(A - \lambda E)^{-1}$ хотя бы для одного λ с $\text{Im } \lambda \neq 0$ непрерывна в равномерной топологии на промежутке $[a, b]$.

На множестве D_0' финитных непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-функций $y(t)$ таких, что $y(t)$ при каждом $t \in [a, b]$ принадлежит области определения $D(A)$ оператора A и $l[y] \in L_2(H, (a, b))$, зададим оператор L_0' : $L_0'y = l[y]$, $y \in D_0'$. Замыкание L_0 эрмитова оператора L_0' в $L_2(H, (a, b))$ назовем минимальным оператором, порожденным выражением (1), а сопряженный к L_0 оператор L_0^* — максимальным оператором.

В этой заметке с помощью методики, развитой в ⁽¹⁻⁴⁾, изучаются области определения минимального и максимального операторов. В случае, когда интервал $[a, b]$ конечен или полубесконечен, дается описание всех максимальных диссипативных (в частности, самосопряженных) расширений в $L_2(H, (a, b))$ минимального оператора L_0 в терминах граничных условий, а также исследуется спектр этих расширений. Если же $[a, b]$ совпадает со всей числовой осью, то показывается, что L_0 — самосопряженный оператор. Далее устанавливается разложение по собственным функциям уравнения $l[y] = \lambda y$. В предположении, что $\dim H < \infty$, близкие вопросы рассматривались многими авторами, о чем подробно см. в ^(5, 6). В случае, когда $\dim H = \infty$ и в выражении (1) отсутствует неограниченный оператор A , некоторые из рассматриваемых вопросов изучены в ^(7, 8).

Заметим, что наличие в выражении (1) неограниченного оператора A дает возможность применить полученные результаты к исследованию некоторых уравнений с частными производными.

2. На множестве $H_+ = D(A)$ введем скалярное произведение $(f, g)_+ = (Af, Ag) + (f, g)$. Тогда H_+ является гильбертовым пространством с позитивной нормой относительно H . Обозначим H_- соответствующее пространство с негативной нормой ⁽⁹⁾. Оператор A непрерывно действует из

H_+ в H . Тогда сопряженный к нему оператор $\tilde{A}$, действующий из H в H_- , является расширением оператора A . В силу того, что $IA = AI$, оператор I можно расширить по непрерывности на H_- . Полученный оператор $\tilde{I}$ также обладает свойствами: $\tilde{I}^2 = E$, $\tilde{I}^* = I$, $\tilde{A}\tilde{I} = I\tilde{A}$. Обозначим

$$\tilde{I}[y] = \tilde{I} dy / dt + \tilde{A}y + q(t)y. \quad (1')$$

Лемма 1. В случае, когда интервал $[a, b]$ конечен, область определения $D(L_0^*)$ максимального оператора L_0^* состоит из тех и только тех вектор-функций $y(t)$, которые представляются в виде

$$y(t) = e^{iIA}f - iI \int_a^t e^{iIA(t-x)}h(x) dx, \quad (2)$$

где $f \in H$, $h(x) \in L_2(H, (a, b))$.

Обозначим D' множество всех непрерывно дифференцируемых в H_+ вектор-функций, а сужение L_0^* на D' — через L' . Из представления (2) вытекает, что в случае конечного интервала замыкание оператора L' в $L_2(H, (a, b))$ совпадает с L_0^* . Отсюда нетрудно установить следующую формулу интегрирования по частям: для любых $y(t), z(t) \in D(L_0^*)$, $t \in [a, b]$, $-\infty < a < z < \infty$,

$$\int_a^b (\tilde{I}[y](t), z(t)) dt - \int_a^b (y(t), \tilde{I}[z](t)) dt = i(Iy(t), z(t))|_a^b, \quad (3)$$

$$\int_a^\infty (\tilde{I}[y](t), z(t)) dt - \int_a^\infty (y(t), \tilde{I}[z](t)) dt = -i(Iy(a), z(a)) \quad (4)$$

в случае полубесконечного интервала. Пользуясь теперь представлением (2) и формулами (3) и (4), получим следующую теорему.

Теорема 1. Область определения $D(L_0^*)$ максимального оператора L_0^* , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, состоит из тех и только тех вектор-функций $y(t) \in L_2(H, (a, b))$, которые удовлетворяют условиям: 1) $y(t)$ непрерывна в H и абсолютно непрерывна в H_- на каждом конечном промежутке из $[a, b]$; 2) $\tilde{I}[y] \in L_2(H, (a, b))$. При этом $L_0^*y = \tilde{I}[y]$.

Область определения $D(L_0)$ минимального оператора L_0 в случае, когда промежуток $[a, b]$ конечен, состоит из тех и только тех вектор-функций $y(t) \in D(L_0^*)$, которые обращаются в нуль на концах сегмента $[a, b]$; если же промежуток $[a, b]$ полубесконечен ($[a, b] = [a, \infty)$), то $D(L_0)$ состоит из тех и только тех вектор-функций $y(t) \in D(L_0^*)$, для которых $y(a) = 0$. Наконец, если $[a, b]$ совпадает со всей числовой осью, то оператор L_0 самосопряжен.

3. Расширение $\tilde{L}$ минимального оператора L_0 называется диссипативным (аккумулятивным) (^{10, 11}), если для любой вектор-функции $y(t) \in$

$$\in D(\tilde{L}) \quad \text{Im} \int ((\tilde{L}y)(t), y(t)) dt \geq 0 \quad (\leq 0). \quad \text{Это расширение называется}$$

максимальным диссипативным (аккумулятивным), если оно не имеет в $L_2(H, (a, b))$ собственных диссипативных (аккумулятивных) расширений. Расширение $\tilde{L}$ является симметрическим в том и только в том случае, когда оно одновременно максимальное диссипативное и максимальное аккумулятивное. Имеет место

Теорема 2. Каково бы ни было сжатие K в пространстве H , граничные условия

$$(K - E)I[y(b) - y(a)] + (K + E)[y(b) + y(a)] = 0, \quad (5)$$

$$(K - E)I[y(b) - y(a)] - (K + E)[y(b) + y(a)] = 0 \quad (6)$$

определяют соответственно максимальное диссипативное и максимальное аккумулятивное расширения оператора L_0 в пространстве $L_2(H, (a, b))$, $-\infty < a < b < \infty$.

Обратно, всякое максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 в $L_2(H, (a, b))$ порождается операцией $\tilde{l}[y]$ и граничным условием вида (5) ((6)). Максимальные симметрические расширения оператора L_0 в $L_2(H, (a, b))$ описываются условиями (5) и (6), в которых K — изометрический оператор. Эти условия задают самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда K унитарен.

При $I = E$ условия (5) и (6) приобретают вид

$$Ky(b) = y(a), \quad Ky(a) = y(b).$$

В случае полуоси теорема об описании максимальных диссипативных (аккумулятивных) расширений оператора L_0 выглядит так.

Теорема 3. *Всякому максимальному диссипативному (аккумулятивному) расширению $\tilde{L}$ оператора L_0 в пространстве $L_2(H, (a, b))$ соответствует граничное условие $y(a) \in M$, где M — I -неположительное (I -неотрицательное) максимальное подпространство в H (см. ⁽¹²⁾), и наоборот, причем это соответствие взаимно однозначно. Максимальные симметрические расширения оператора L_0 описываются граничным условием $y(a) \in M$, где $M \subset H$ — максимальное I -нейтральное подпространство. Это условие задает самосопряженное расширение L_0 в $L_2(H, (a, \infty))$ тогда и только тогда, когда M — гипермаксимальное I -нейтральное подпространство ⁽¹²⁾. При этом существование самосопряженных расширений возможно лишь при условии $\dim P_+H = \dim P_-H$, где $P_{\pm}$ — проекторы на собственные подпространства оператора I , соответствующие собственным значениям ± 1 .*

4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\omega(t, \lambda) = e^{iI(A-\lambda E)t} + i \int_a^t e^{iI(A-\lambda E)(t-s)} Iq(s) \omega(s, \lambda) ds. \quad (7)$$

Методом последовательных приближений можно показать, что это уравнение имеет единственное решение в классе непрерывных на любом конечном промежутке из $[a, b]$ в равномерной операторной топологии операторных функций, которое аналитически зависит от λ и удовлетворяет условию $\omega(a, \lambda) = E$. При $\text{Im } \lambda = 0$ оператор $\omega(t, \lambda)$ является I -унитарным, т. е. $\omega^*(t, \lambda)I\omega(t, \lambda) = \omega(t, \lambda)I\omega^*(t, \lambda) = I$. Если $f \in D(A)$, то $\omega(t, \lambda)f$ — решение уравнения $\tilde{l}[y] = \lambda y$; при $f \in H$ $\omega(t, \lambda)f$ — решение уравнения $\tilde{l}[y] = \lambda y$.

Обозначим

$$D_K^{\pm}(\lambda) = [(K - E)I \pm (K + E)\omega(b, \lambda)] + [\pm(K + E) - (K - E)I].$$

Ясно, что $D_K^+(\lambda)$ и $D_K^-(\lambda)$ — целые операторные функции. Оказывается, что особенности оператор-функций $(D_K^+(\lambda))^{-1}$ ($(D_K^-(\lambda))^{-1}$) тесно связаны со спектром максимального диссипативного (аккумулятивного) расширения $\tilde{L}_K$ оператора L_0 , соответствующего граничному условию (5) ((6)). Именно, имеет место

Теорема 4. *Точка λ принадлежит спектру максимального диссипативного (аккумулятивного) расширения $\tilde{L}_K$ тогда и только тогда, когда 0 — точка спектра оператора $D_K^+(\lambda)$ ($D_K^-(\lambda)$), причем, если λ — собственное число кратности m , точка непрерывного спектра, точка остаточного спектра оператора $\tilde{L}_K$, то 0 является соответственно собственным числом кратности m , точкой непрерывного спектра, точкой остаточного спектра оператора $D_K^+(\lambda)$ ($D_K^-(\lambda)$).*

Из этой теоремы вытекает, что в случае, когда $I = E$ и $q(t) \equiv 0$, спектр оператора $\tilde{L}_K$ имеет вид $\{\sigma + 2k\pi / (b - a)\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\{\sigma\}$ — множество решений в промежутке $[0, 2\pi / (b - a))$ уравнения $e^{-i\lambda(b-a)} = -\mu$, в котором μ пробегает спектр оператора K . Отсюда можно прийти к следующим утверждениям.

Следствие 1. *Если $\dim H = \infty$, то, каково бы ни было замкнутое множество F в промежутке $[0, 2\pi / (b - a))$, всегда существует самосопряженное расширение минимального оператора L_0 , порожденного выра-*

жением (1) с $I = E$ и $q(t) \equiv 0$, спектр которого совпадает с множеством $\{F + 2k\pi / (b - a)\} = \{\lambda: \lambda = \alpha + 2k\pi / (b - a), \alpha \in F, k = 0, \pm 1, \dots\}$.

Следствие 2. В случае $\dim H = \infty$ и $I = E$ не существует самосопряженных расширений оператора L_0 , спектр которых был бы дискретным.

Как показывает следствие 2, случай $\dim H = \infty$ противоположен случаю $\dim H < \infty$ в том смысле, что при $\dim H < \infty$ все самосопряженные расширения минимального оператора имеют дискретный спектр, причем собственные значения всех таких расширений имеют одну и ту же асимптотику $\lambda_k \sim 2k\pi / (b - a)$, что следует из теоремы 4 и асимптотической теоремы Фань-Цюя⁽⁵⁾.

5. Сопоставим каждой финитной на $[a, b]$ вектор-функции из $L_2(H, (a, b))$ вектор-функцию

$$\tilde{y}(\lambda) = \int_a^b \omega^*(t, \bar{\lambda}) y(t) dt,$$

которая является целой по λ . Используя результаты, относящиеся к обобщению метода направляющих функционалов М. Г. Крейна (см. (13, 14)), получим следующую теорему.

Теорема 5. Существует операторная функция распределения $\rho(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$ (неубывающая эрмитова операторная функция, значениями которой служат ограниченные операторы в H , $\rho(0) = 0$, $\rho(\lambda - 0) = \rho(\lambda)$) такая, что для произвольных вектор-функций $y(t)$, $z(t) \in L_2(H, (a, b))$

$$\int_a^b (y(t), z(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho(d\lambda) \tilde{y}(\lambda), \tilde{z}(\lambda)); \quad (8)$$

оператор-функция $\rho(\lambda)$ единственна тогда и только тогда, когда оператор L_0 максимальный симметрический. В случае $\dim P_+H = \dim P_-H$ единственность оператор-функции $\rho(\lambda)$ будет лишь тогда, когда $a = -\infty$, $b = \infty$.

Если интервал $[a, b]$ конечен, то можно установить, что минимальный оператор L_0 является целым в смысле М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна^(15, 16) с обобщенным масштабом $M = \{\delta_{af}\}$ (f пробегает H), где оператор δ_a определяется соотношением $\langle \delta_{af}, y(t) \rangle = (f, y(a))$; здесь $y(t)$ — произвольная непрерывная в H вектор-функция. Используя результаты^(15, 16), можно дать описание всех операторных функций распределения, участвующих в равенстве (8), в том случае, когда интервал $[a, b]$ конечен.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. М. Березанскому за внимание к этой работе.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
22 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, ДАН, 184, № 4, 774 (1969).
- ² М. Л. Горбачук, Функциональный анализ и его приложения, 5, № 1, 10 (1971).
- ³ В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Укр. матем. журн., 23, № 1, 3 (1971).
- ⁴ В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Функциональный анализ и его приложения, 5, № 4, 67 (1971).
- ⁵ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., 1965.
- ⁶ Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, М., 1970.
- ⁷ В. М. Адамян, ДАН, 178, № 1, 9 (1968).
- ⁸ Ф. С. Рофе-Бекетов, ДАН, 184, № 5, 1034 (1969).
- ⁹ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.
- ¹⁰ Р. С. Филлипс, Сборн. пер. Математика, 6, 4, 11 (1962).
- ¹¹ А. В. Штраус, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 186 (1968).
- ¹² М. Г. Крейн, Введение в геометрию indefinitных 1-пространств и теория операторов в этих пространствах, Вторая летняя матем. школа (Кацивели, июнь — июль 1964 г.), Киев, 1965.
- ¹³ Ф. С. Рофе-Бекетов, Функциональный анализ и его приложения, Тр. V Всесоюз. конфер. по функц. anal. и его применениям, Баку, 1961.
- ¹⁴ H. Langer, Acta math. hung., 21, 207 (1970).
- ¹⁵ М. Г. Крейн, Укр. матем. журн., № 2, 3 (1949).
- ¹⁶ Ю. Л. Шмульян, Док. АН УРСР, сер. А, № 5, 432 (1970).