

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. К. БАЛАШОВ

О ФУНКЦИЯХ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ПО КРИВЫМ ПРАВИЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 VI 1972)

1. В этой заметке рассматриваются классы целых функций с особой правильностью поведения по кривым, близким к логарифмическим спиральям, связанной с правильным распределением корней по указанным кривым. Эти функции обобщают известные классы функций вполне регулярного роста (в.р.р.), исследованные Б. Я. Левиным ⁽¹⁾ и А. Пфлюгером ⁽²⁾. Вопросами, связанными с изучением поведения целых функций вдоль логарифмических спиралей и подобных им кривых, занимались Макинтайр ⁽³⁾ и Кеннеди ⁽⁴⁾; Макинтайр ввел индикатор по логарифмическим спиральям и обобщил понятие ассоциированной функции, Кеннеди обобщил понятие функции Миттаг-Леффлера на криволинейные области.

Введем обозначение:

$$L_{\varphi}^{\gamma}(a, b) = \{t = |t| \exp \{i(\gamma(|t|) + \varphi)\}, 0 \leq a \leq |t| \leq b\},$$

где $\gamma(x)$ определена и дифференцируема на (a, ∞) , причем существует $\lim_{x \rightarrow \infty} x\gamma'(x) = c$; φ — действительная постоянная.

Если $\gamma(x) = c \ln x$, будем писать $L_{\varphi}^{\gamma}(a, b) = L_{\varphi}^c(a, b)$ (логарифмическая спираль). Для краткости также полагаем $L_{\varphi}^{\gamma}(a, \infty) = L_{\varphi}^{\gamma}$ и $L_{\varphi}^c(0, \infty) = L_{\varphi}^c$.

Определение. Назовем L_{φ}^{γ} кривой правильного вращения (к.п.в.), если $-\infty < c < \infty$.

В дальнейшем будем всюду полагать, что L_{φ}^{γ} — к.п.в., если не оговорено противное.

Введем в рассмотрение произведение Вейерштрасса

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}; p\right), \quad G(u; p) = (1 - u) \exp\left\{u + \dots + \frac{1}{p} u^p\right\},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_0^{\gamma}$; $p = [\rho]$ (ρ — показатель сходимости последовательности $\{a_k\}$).

2. Рассмотрим функцию $\Pi(z)$ при нецелом ρ .

Теорема 1. Пусть $\{a_k\} \subset L_0^{\gamma}$ — множество плотности Δ при уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho$ (ρ нецелое), т. е.

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \cdot n(r), \quad (1)$$

где $n(r)$ — число точек $\{a_k\}$ в $|z| \leq r$.

Тогда при $0 < \theta < 2\pi$, $|z| = r$.

$$\lim_{\substack{z \in L_0^{\gamma}, \\ r \rightarrow \infty}} r^{-\rho(r)} \ln \Pi(z) = \pi \Delta \exp\left\{i \frac{\rho(\theta - \pi)}{1 + ic}\right\} / \sin \frac{\pi \rho}{1 + ic}, \quad (2)$$

причем стремление к пределу равномерно по θ , $0 < \eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$.

* Здесь и везде далее $[a]$ означает целую часть a .

Здесь и в дальнейшем ветви $\ln(1 - z/a_k)$ выбраны в плоскости с разрезом по L_0^γ , так что $\ln(1 - z/a_k)|_{z=0} = 0$.

При доказательстве теоремы 1 используется

Лемма 1. Пусть $\beta = \alpha + i\eta$, α и η — действительные постоянные, причем $0 < \alpha - \eta < 1$. Тогда при $0 < \varphi < 2\pi$

$$\int_{L_0^c} \frac{\tau^{-\beta}}{\tau - z} d\tau = 2\pi i z^{-\beta} / \{1 - \exp(-2\pi i \beta)\}, \quad z \in L_\varphi^c.$$

3. В случае целого ρ введем вспомогательную функцию (ср. (1))

$$V_r(z) = \prod_{|a_k| \leq r} G\left(\frac{z}{a_k}; \rho - 1\right) \cdot \prod_{|a_k| > r} G\left(\frac{z}{a_k}; \rho\right), \quad |z| = r.$$

Теорема 2. Пусть $\{a_k\} \subset L_0^\gamma$ — множество плотности Δ при уточненном порядке $\rho(r)$ (ρ целое).

Тогда при $0 < \theta < 2\pi$, $|z| = r$.

$$\lim_{z \in L_0^\gamma, r \rightarrow \infty} \frac{\ln V_r(z)}{r^{\rho(r)}} = \begin{cases} -\Delta \left(\frac{1}{\rho} - i(\theta - \pi) \right) \exp\{i\rho\theta\}, & c = 0, \\ \pi\Delta \exp\left\{i \frac{\rho(\theta - \pi)}{1 + ic}\right\} / \sin \frac{\pi\rho}{1 + ic} - \frac{i\Delta}{\rho c} \exp\{i\rho\theta\}, & c \neq 0, \end{cases}$$

причем стремление к пределу равномерно по θ , $0 < \eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$.

Главной частью доказательства теоремы 2 является

Лемма 2. Пусть $\beta = i\alpha / (1 + ic)$, $\alpha \neq 0$ — действительная постоянная. Тогда при $0 < \varphi < 2\pi$

$$\int_{L_0^c(0,1)} \frac{\tau^{-\beta} d\tau}{\tau - z} + z \int_{L_0^c(1,\infty)} \frac{\tau^{-\beta} d\tau}{\tau(\tau - z)} = \frac{2\pi z^{-\beta}}{1 - \exp\{-2\pi i \beta\}} - \frac{1}{\beta}, \quad z \in L_\varphi^c.$$

Приведем теперь аналог теоремы 1 для целого ρ , $c \neq 0$.

Теорема 3. Пусть множество $\{a_k\}$ такое же, как и в теореме 2, причем существует $\gamma''(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \gamma''(x) = -c \neq 0$, и пусть при некоторой

$C = \text{const}$ существует предел

$$\delta_f = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho - \rho(r)} \left(C + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho} \right) \exp\{i\rho\gamma(r)\}. \quad (3)$$

Тогда при $0 < \theta < 2\pi$ для функции $f(z) = \Pi(z) \exp\{cz^\rho\}$ выполняется равенство (2), причем стремление к пределу равномерно по θ , $0 < \eta \leq \theta \leq 2\pi - \eta$.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы C определяется множеством $\{a_k\}$.

Замечание 2. Условию теоремы 3 удовлетворяет, например, множество $\{a_k\} \subset L_0^\gamma$ с $n(t) = [\Delta t^\rho + \varphi(t)]$, $\varphi(t) \uparrow$, $\varphi(t) = O(t^\rho / \ln^{1+\delta} t)$, $\delta > 0$, $t \rightarrow \infty$.

Замечание 3. Существование плотности (1) без дополнительного требования (3) не является достаточным для справедливости теоремы 3. Например, если $\{a_k\} \subset L_0^c$, $n(t) = [\max_{2 \leq x \leq t} \{\Delta x^\rho + x^\rho \sin(\rho c \ln x) / \ln x\}]$,

то функция $\Pi(z)$ имеет максимальный тип.

В случае $c = 0$ доказана следующая

Теорема 4. Пусть множество $\{a_k\}$ такое же, как и в теореме 2 и $c = 0$. Тогда функция $r^{-\rho(r)} \ln \Pi(z)$, $|z| = r$, неограничена на L_0^γ .

Замечание. В случае $c = 0$ также можно построить целые функции $f(z)$ с корнями на к.п.в., чтобы существовал конечный $\lim_{z \in L_0^\gamma, r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \ln f(z)$,

$0 < \theta < 2\pi$, $|z| = r$ (за счет, например, соответствующим образом подоб-

ранной нулевой плотности корней или особой симметрии их распределения).

4. Введем понятие плотности по к.п.в. аналогично тому, как вводится угловая плотность ⁽¹⁾.

Определение. Будем говорить, что множество $\{a_k\}$ имеет плотность $\Delta^\gamma(\theta_1, \theta_2)$ с показателем $\rho(r)$ по L_0^γ , если для всех $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, исключая, быть может, счетное множество N ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \cdot n^\gamma(r; \theta_1, \theta_2) = \Delta^\gamma(\theta_1, \theta_2),$$

где $n^\gamma(r; \theta_1, \theta_2)$ — число точек $\{a_k\}$ в криволинейном секторе $z \in \bigcup_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} L_0^\gamma(a, r)$ (если $\gamma(x) \equiv 0$, то $\Delta^\gamma(\theta_1, \theta_2) = \Delta(\theta_1, \theta_2)$ — угловая плотность ⁽¹⁾).

Равенство $\Delta^\gamma(\theta) \equiv \Delta^\gamma(\theta_1, \theta)$ определяет при фиксированном θ_1 , с точностью до постоянной, неубывающую функцию $\Delta_{(\theta)}^\gamma$. Исключительные значения $\theta \in N$ должны быть точками разрыва $\Delta^\gamma(\theta)$ (ср. ⁽¹⁾).

Определение. Назовем множество $\{a_k\}$ правильно распределенным по L_0^γ , если оно имеет плотность по этим к.п.в. с показателем $\rho(r)$ и для целого ρ при некоторой постоянной C существует предел (3).

Отметим, что если множество $\{a_k\}$ правильно распределено по L_0^γ , $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \gamma''(x) = -c \neq 0$, то C определяется однозначно через $\{a_k\}$.

Следуя Б. Я. Левиному ⁽¹⁾, назовем C^0 -множеством множество кружков $|z - z_n| < r_n, n = 1, 2, \dots$, подчиненных условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum_{|z_n| < r} r_n = 0.$$

Введем обозначения:

$$H^\gamma(\theta) = -i \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi) \exp\{i\rho(\theta - \psi)\} d\Delta^\gamma(\psi) + \delta_f \exp\{i\rho\theta\},$$

если $\rho = [\rho]$ и $c = 0$ одновременно (δ_f определяется из (3)), и

$$H^\gamma(\theta) = \frac{\pi}{\sin[\pi\rho/(1+ic)]} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \exp\left\{i \frac{\rho(\theta - \psi - \pi)}{1+ic}\right\} d\Delta^\gamma(\psi),$$

если либо $\rho \neq [\rho]$, либо $c \neq 0$.

Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = z^m \exp\{P(z)\} \cdot \Pi(z), \quad P(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_p z^p,$$

где $p = [\rho]$, причем если ρ целое, то $C_p = C$.

Теорема 5. Пусть множество $\{a_k\}$ правильно распределено по L_0^γ , причем, если ρ целое, то либо $c = 0$, либо $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \gamma''(x) = -c \neq 0$.

Тогда при z , не принадлежащем некоторому C^0 -множеству,

$$\lim_{z \in L_0^\gamma, r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \cdot \ln|f(z)| = \operatorname{Re} H^\gamma(\theta), \quad |z| = r,$$

и стремление к пределу равномерно по $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Аналогично ⁽¹⁾, назовем обыкновенным те L_0^γ , для которых

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \cdot n^\gamma(r; \theta - h, \theta + h) \right\} = 0.$$

Теорема 6. Пусть множество $\{a_k\}$ такое же, как и в теореме 5. Тогда при z , не принадлежащем некоторому C^0 -множеству, и для любой обыкно-

венной L_θ^γ выполняется равенство

$$\lim_{z \in L_\theta^\gamma, r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \cdot \ln f(z) = H^\gamma(\theta), \quad |z| = r,$$

причем стремление к пределу равномерно на любом замкнутом множестве обыкновенных к.п.в.

5. Рассмотрим теперь функции в.р.р. по к.п.в.

Определение. Назовем целую функцию $F(z)$ функцией в.р.р. по L_θ^γ , если функция $r^{-\rho(r)} \ln |F(z)|$ при $|z| = r$, $z \in L_\theta^\gamma$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, равномерно стремится к некоторой функции $h_F^\gamma(\theta)$, когда $r \rightarrow \infty$, не принимая значений из некоторого множества E нулевой относительной меры, общего для всех θ .

Доказана следующая основная теорема о функциях в.р.р. по к.п.в.

Теорема 7. Для того чтобы целая функция $F(z)$ была в.р.р. по L_θ^γ , $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \gamma''(x) = -c$, необходимо и достаточно, чтобы множество ее корней было правильно распределено по этим к.п.в.

Отметим, что функции в.р.р. по к.п.в. не являются функциями в.р.р. (в общепринятом смысле). Что касается случая $c = \pm \infty$, справедлива

Теорема 8. Если целая функция $F(z)$ в.р.р. при уточненном порядке $\rho(r)$ по L_θ^γ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \gamma'(x) = \pm \infty$ и существует обратная функция $\gamma^{-1}(y)$, то $F(z)$ — в.р.р. и при z , не принадлежащем некоторому множеству E нулевой относительной меры,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} \cdot \ln |F(z)| \equiv \text{const}, \quad |z| = r.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. В. Говорову за постановку задачи и внимание к данной работе.

Поступило
7 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. ² A. Pfluger, Comm. Math. Helv., 11, 180 (1938); 12, 25 (1938). ³ A. Macintyre, Proc. London Math. Soc. (2), 45, 1 (1938). ⁴ P. B. Kennedy, Proc. London Math. Soc. (3), 6, 518 (1956).