

А. М. СЕДЛЕЦКИЙ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ H^p В ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 V 1972)

Пусть $p \in (0, \infty)$; $H^p = H^p(0, \infty)$ обозначает пространство функций, голоморфных в правой полуплоскости, для которых

$$\|f(z)\| = \sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dy \right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$. Введем оператор T , действующий в H^p по правилу: $Tf(z) = \{f(\lambda_n)\}$. Будем писать $TH^p \subset l^p$, если $Tf \in l^p$ для $\forall f \in H^p$; и $TH^p \supset l^p$, если для $\forall \{c_n\} \in l^p \exists f \in H^p$ так, что $Tf = \{c_n\}$. Пишем $TH^p = l^p$, если одновременно $TH^p \subset l^p$ и $TH^p \supset l^p$. Настоящая работа устанавливает критерий соотнесения $TH^p = l^p$.

Теорема. Для того чтобы $TH^p(0, \infty) = l^p$, необходимо и достаточно, чтобы 1°) $0 < \inf \operatorname{Re} \lambda_n \leq \sup \operatorname{Re} \lambda_n < \infty$, 2°) $\inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0$.

Пусть $H^p\{|z| < 1\}$ есть пространство функций, голоморфных в круге $|z| < 1$, для которых $\|g\| = \sup_{r<1} \left(\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty$; $\tilde{T}$ — оператор, действующий в $H^p\{|z| < 1\}$ по правилу: $\tilde{T}g = \{g(z_n)(1 - |z_n|^2)^{1/p}\}$, $|z_n| < 1$. Известен (см. (4), гл. 9) следующий результат (принадлежащий Л. Карлесону (2), Г. Шапиро и А. Шилдсу (1), В. Кабайла (5) соответственно при $p = \infty$, $p \in [1, \infty)$, $p \in (0, 1)$):

$$\tilde{T}H^p = l^p \Leftrightarrow \inf_k \prod_{n \neq k} |z_k - z_n| |1 - \bar{z}_n z_k|^{-1} > 0.$$

Мы не рассматриваем случай $p = \infty$, так как он сразу вытекает из теоремы Л. Карлесона, если воспользоваться отображением круга на полуплоскость.

Лемма 1. Оператор $f(w) \rightarrow (1-z)^{-2/p} f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ устанавливает изоморфизм между пространством $H^p(0, \infty)$ и пространством $H^p\{|z| < 1\}$.

При $p \geq 1$ лемма доказана в (3). Если $f \in H^p$, $p < 1$, то следует воспользоваться факторизацией $f = EB$, где $E(z) \in H^p$ и не имеет корней, $B(z)$ — функция Бляшке. Затем к функции $E^p(z) \in H^1$ применить лемму.

Лемма 2 (4). Для $\forall g \in H^p\{|z| < 1\}$

$$|g(z)| \leq C \|g\| (1 - |z|)^{-1/p}, \quad |z| < 1.$$

Из лемм 1, 2 выводится

Лемма 3. Если $f \in H^p(0, \infty)$, то

$$|f(z)| \leq C x^{-1/p} \|f\|, \quad x = \operatorname{Re} z > 0.$$

Лемма 4. Если $TH^p \supset l^p$, то $\sup \operatorname{Re} \lambda_n < \infty$.

Если бы $\sup \operatorname{Re} \lambda_n = \infty$, то нашлась бы подпоследовательность $\{\mu_n\}$ последовательности $\{\lambda_n\}$ так, что $\{(\operatorname{Re} \mu_n)^{-1/p}\} \in l^{p/2}$. Тогда по лемме 3 $\{f(\mu_n)\} \in l^{p/2}$ для $\forall f \in H^p$. Значит, если $\{c_n\} \in l^p$, но $\{c_n\} \notin l^{p/2}$, то не существует $f \in H^p$ такой, что $f(\mu_n) = c_n$.

Лемма 5. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, $\lim \operatorname{Re} \lambda_n = 0$. Тогда существует подпоследовательность $\{\mu_n\}$ последовательности $\{\lambda_n\}$ так, что $\exists \{f_n(w)\}$ функций, голоморфных и равномерно ограниченных в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и таких, что $f_n(\mu_n) = \delta_{kn}$.

Обозначим через $\{z_n\}$ последовательность прообразов точек $\{\lambda_n\}$ при отображении $w = (1+z)(1-z)^{-1}$ круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$. Очевидно, $\lim |z_n| = 1$. Тогда ⁽³⁾ существует подпоследовательность $\{\zeta_n\}$ последовательности $\{z_n\}$ так, что $|B_n(\zeta_n)| \geq \delta > 0$ для $\forall n$, где $B_n(z)$ — функция Бляшке с корнями $\{\zeta_k\}_{k \neq n}$. Искомой будет последовательность образов функций $(B_n(\zeta_n))^{-1} B_n(z)$ при отображении $w = (1+z)(1-z)^{-1}$.

Лемма 6. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ и $\lim \operatorname{Re} \lambda_n = 0$. Тогда $\exists f \in H^p$ такая, что $\lim |f(\lambda_n)| > 0$.

Пусть $\varphi \in H^p$, $|\varphi(z)| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$. Существует подпоследовательность $\{\mu_n\}$ последовательности $\{\lambda_n\}$ так, что одновременно выполняются утверждения леммы 5 и $\sum |\varphi(\operatorname{Re} \mu_n)|^{-1} < \infty$. Пусть $\{f_n\}$ — функции из леммы 5; рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum \frac{f_n(z) \varphi(z - i \operatorname{Im} \mu_n)}{\varphi(\operatorname{Re} \mu_n)}. \quad (1)$$

Так как $\|\varphi(z - i \operatorname{Im} \mu_n)\| = \|\varphi(z)\|$, то, благодаря сходимости ряда $\sum |\varphi(\operatorname{Re} \mu_n)|^{-1}$ и равномерной ограниченности $|f_n(z)|$, ряд (1) сходится в метрике H^p . В силу полноты H^p , $f \in H^p$. Очевидно, $f(\mu_n) = 1$.

Уместно сравнить лемму 6 со следующим известным ⁽³⁾ свойством классов H^p : $f(z) \rightarrow 0$ равномерно при $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$.

Из леммы 6 непосредственно следует

Лемма 7. Если $TH^p \subset l^p$, то $\inf \operatorname{Re} \lambda_n > 0$.

Лемма 8. Пусть P — оператор, действующий в H^p по правилу $Pf(z) = \{f(\lambda_n) (\operatorname{Re} \lambda_n)^{1/p}\}$. Для того чтобы $PH^p = l^p$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_k \prod_{n \neq k} \left| \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\lambda_k + \bar{\lambda}_n} \right| > 0. \quad (2)$$

Благодаря лемме 1, лемма 8 эквивалентна упоминавшемуся результату об операторе T в пространстве $H^p\{|z| < 1\}$.

Доказательство теоремы. Из лемм 4, 7 следует необходимость условия 1^o). Теперь соотношения $TH^p = l^p$ и $PH^p = l^p$ выполняются одновременно. По лемме 8 имеет место условие (2). В произведении (2) каждый сомножитель не превосходит единицы. Поэтому, если бы $\inf |\lambda_k - \lambda_n| = 0$, то и $\inf_k \prod_{n \neq k} |\lambda_k - \lambda_n| |\lambda_k + \bar{\lambda}_n|^{-1} = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Условие 1^o) выполняется. По лемме 8 достаточно проверить, что условия теоремы влекут условие (2). Покажем, что выполняется эквивалентное условие

$$\sup_k B_k = \sup_k \sum_{n \neq k} \ln \left| \frac{\lambda_k + \bar{\lambda}_n}{\lambda_k - \lambda_n} \right| < \infty.$$

Пусть $a = \inf \operatorname{Re} \lambda_n$, $A = \sup \operatorname{Re} \lambda_n$. При фиксированном k для любого целого m обозначим через P_m прямоугольник $a \leq \operatorname{Re} z \leq A$, $|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} \lambda_k - m| \leq 1/2$. Тогда

$$B_k \leq \sum_m \sum_{\lambda_n \in P_m} \ln \left| \frac{\lambda_k + \bar{\lambda}_n}{\lambda_k - \lambda_n} \right|, \quad n \neq k.$$

Из условия 2^о) следует, что число точек λ_n , попавших в P_m , не превосходит некоторого числа N , не зависящего от m . Поэтому

$$\sum_{\lambda_n \in P_0} \ln \left| \frac{\lambda_k + \bar{\lambda}_n}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \leq N \ln \frac{1+2A}{\delta}, \quad \delta = \inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m|.$$

Далее положим $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$; получим для $\lambda_n \in P_m$, $m \neq 0$,

$$\ln \left| \frac{\lambda_k + \bar{\lambda}_n}{\lambda_k - \lambda_n} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4\alpha_n \alpha_k}{(\alpha_n - \alpha_k)^2 + (\beta_n - \beta_k)^2} \right) \leq \frac{2A^2}{(\beta_n - \beta_k)^2} \leq \frac{2A^2}{(|m| - 1/2)^2}.$$

Теперь

$$B_k \leq N \ln \frac{1+2A}{\delta} + 4NA^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m - 1/2)^2},$$

значит,

$$\sup_k B_k < \infty.$$

Московский энергетический
институт

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ H. S. Shapiro, A. L. Shields, Am. J. Math., 83, 543 (1961). ² L. Carleson, Am. J. Math., 80, 921 (1958). ³ Р. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963. ⁴ P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, N. Y., 1970. ⁵ В. Кабайла, Литовск. матем. сб., 3, 141 (1963).