Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 517.946.82 — *МАТЕМАТИКА*

П. К. СЕНАТОРОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\operatorname{div}\{k(x)\operatorname{grad} u\}-q(x)u=-f(x)$

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 V 1972)

Пусть $u(x)$ — решение задачи

$$\frac{d}{dx}\left\{k(x)\frac{du}{dx}\right\}-q(x)u=-f(x),\quad a<x<b,\quad u(a)=u(b)=0,$$

а $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots,$ — решение той же задачи со старшим коэффициентом $k_n(x)$, причем $k(x)$, $k_n(x)\geqslant\alpha>0$, $q(x)\geqslant 0$.

В работе [1] показано, что из слабой сходимости последовательности $1/k_n(x)$ к $1/k(x)$ в классе измеримых и ограниченных функций следует сходимость последовательности решений $u_n(x)$ к $u(x)$ в классе Гёльдера $C^{(0,\mu)}(a, b)$ при любом $\mu\in(0, 1)$.

В настоящей заметке мы докажем, что этот результат имеет место только в одномерном случае и не может быть перенесен на аналогичную задачу в области двух или большего числа переменных даже в случае простейшего эллиптического уравнения. А именно, существует такая последовательность коэффициентов $k_n(x)$ и такие $f(x)$ и $q(x)$, что из слабой сходимости последовательности $1/k_n(x)$ к $1/k(x)$ в ограниченной области пространства нескольких переменных не следует сходимость последовательности решений задачи Дирихле для уравнения $\operatorname{div}\{k_n(x)\operatorname{grad} u\}-q(x)u=-f(x)$ даже в слабом смысле.

П р и м е р. Последовательность решений задач

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon\cos nx}\operatorname{grad} u_n(x, y)\right\}=-\sin y,\quad (x, y)\in\Pi,\\ u_n(x, y)=0,\quad n=\pm\pi,\quad y=0,\quad y=\pi,\end{gathered}\tag{1}$$

где $0<\varepsilon<1$, Π — прямоугольник $-\pi<x<\pi$, $0<y<\pi$, не является слабо сходящейся к решению «предельной» задачи

$$\begin{gathered}\Delta u(x, y)=-\sin y,\quad (x, y)\in\Pi,\\ u(x, y)=0,\quad x=\pm\pi,\quad y=0,\quad y=\pi\end{gathered}\tag{2}$$

(заметим, что последовательность $1/k_n\equiv 1+\varepsilon\cos nx$ сходится слабо к $1/k\equiv 1$ в прямоугольнике Π).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v_n(x)$ — решение задачи

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{1+\varepsilon\cos nx}\frac{dv_n}{dx}\right\}-\frac{1}{1+\varepsilon\cos nx}v_n=-1,\quad x\in(-\pi, \pi),\quad v_n(\pm\pi)=0,$$

а $v(x)$ — соответственно решение «предельной» задачи

$$d^2v/dx^2-v=-1,\quad x\in(-\pi, \pi),\quad v(\pm\pi)=0.$$

Для разности $w_n(x) \equiv v_n(x) - v(x)$ выполняется соотношение

$$w_n(x) = \varepsilon^2 \int_{-\pi}^{x} dz \int_{0}^{z} \frac{v(t)\cos^2 nt\, dt}{1+\varepsilon\cos nt} + \int_{-\pi}^{x} I_n(z)\, dz, \qquad (3)$$

$$I_n(z) \equiv \varepsilon \int_0^z v(t)\cos nt\, dt + \varepsilon \cos nz \left\{ \int_0^z \frac{w_n(t)\, dt}{1+\varepsilon\cos nt} - z \right\} +$$

$$+ (1+\varepsilon\cos nz) \int_0^z \frac{w_n(t)\, dt}{1+\varepsilon\cos nt}.$$

Предположим, что имеет место слабая сходимость $w_n(x)$ к нулю. Тогда, в силу компактности $w_n(x)$ в $C^{(0,\mu)}(-\pi, \pi)$, имеет место сильная сходимость $w_n(x)$ к нулю в $C^{(0,\mu)}(-\pi, \pi)$. Учитывая это, а также слабую сходимость к нулю последовательности $\cos nx$, убеждаемся, что $\int_{-\pi}^{x} I_n(z)\, dz = o(1)$.

Так как $v(t) \not\equiv 0$ и сохраняет знак на $(-\pi, \pi)$, то существует такое положительное число δ, зависящее от $x \in (-\pi, \pi)$, что первое слагаемое в правой части (3) превосходит δ по модулю для всех достаточно больших номеров n, что противоречит предположению о стремлении $w_n(x)$ к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, последовательность $w_n(x)$ не сходится слабо к нулю.

Так как $u_n(x, y) = v_n(x) \sin y$ — решение задачи (1), то можно утверждать, что слабая сходимость последовательности $1/k_n(x)$ к $1/k(x)$ не ведет к сходимости соответствующей последовательности решений $u_n(x, y)$ к $u(x, y)$ даже в слабом смысле.

Замечание 1. По аналогии с данным примером можно построить примеры для областей типа прямоугольного параллелепипеда в пространстве N переменных ($N \geqslant 3$), а также для областей, являющихся топологическим произведением произвольной $(N-1)$-мерной области на отрезок.

Замечание 2. Положив в уравнении (1) $k_n = 1 + \varepsilon \cos nx$, $k \equiv 1$, $0 < \varepsilon < 1$, получим пример, показывающий, что слабая сходимость последовательности самих старших коэффициентов k_n не является достаточным условием сходимости последовательности решений. (То же самое имеет место и в одномерном случае.)

В заключение автор приносит искреннюю благодарность проф. В. А. Ильину и акад. А. Н. Тихонову за постановку задачи и обсуждение результата. Автор выражает признательность И. А. Шишмареву, чьи критические замечания во многом способствовали выяснению существа рассмотренной проблемы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. К. Сенаторов, Дифференциальные уравнения, 7, № 4 (1970).