Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 517.5.35.4

МАТЕМАТИКА

Е. Н. СЕРГИЕНКО

О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНУЮ ОЦЕНКУ СНИЗУ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 V 1972)

1°. В. И. Мацаеву ([1], [2]) принадлежат следующие теоремы, имеющие важные приложения в теории линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (([3]), гл. IV).

Теорема А. *Если целая функция $f(z)$ допускает во всей плоскости оценку снизу*

$$\ln|f(z)| \geqslant -Cr^\alpha|\sin\varphi|^{-k}, \quad \alpha>1, \quad k\geqslant 0,\ z=re^{i\varphi},$$

то функция $f(z)$ не выше нормального типа порядка α.

Теорема В. *Если целая функция $f(z)$ допускает во всей плоскости оценку снизу*

$$\ln|f(z)| \geqslant -C(r|\sin\varphi|^{-1})^\rho, \quad 0<\rho<1,$$

то функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\ln|f(t)||(1+t^2)^{-1}\,dt<\infty.$$

2°. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, $T(r, f)$, $N(r, a, f)$, $\delta(a, f)$ — стандартные для неванлинновской теории величины, характеризующие распределение значений функции $f(z)$ ([4], [5]).

Напомним, что если $\delta(a, f)>0$, то число a называют неванлинновским исключительным, или дефектным, значением функции $f(z)$. Заметим, что для целой функции $f(z)$ выполняется $\delta(\infty, f)=1$.

Нами получены следующие теоремы, являющиеся обобщениями теорем В. И. Мацаева на мероморфные функции.

Теорема 1. *Если мероморфная функция $f(z)$ допускает во всей плоскости оценку снизу*

$$\ln|f(z)| \geqslant -Cr^\alpha|\sin\varphi|^{-k}, \quad \alpha>1, \quad k\geqslant 0,$$

и, кроме того, выполнено условие

$$\delta(\infty, f)>0,$$

то функция $f(z)$ не выше нормального типа порядка α.

Теорема 2. *Если мероморфная функция $f(z)$ допускает во всей плоскости оценку снизу*

$$\ln|f(z)| \geqslant -C(r|\sin\varphi|^{-1})^\rho, \quad 0<\rho<1,$$

и, кроме того, выполнено условие

$$\delta(\infty, f)>0,$$

то: а) *функция $f(z)$ не выше экспоненциального типа, т. е. $T(r, f)=O(r)$;*

б) *сходится интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\ln|f(t)||(1+t^2)^{-1}\,dt;$$

в) *существует предел*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin A}} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r} = \begin{cases} K_1 \sin\varphi, & 0<\varphi<\pi, \\ K_2\sin\varphi, & \pi<\varphi<2\pi, \end{cases}$$

где множество $A\subset[1,\infty)$ *такое, что*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\operatorname{mes}\{A\cap[0,r]\}=0.$$

Как известно ([6], гл. IV), утверждение в) для целой функции $f(z)$ вытекает из утверждения теоремы В.

3°. Напомним, что число a вызывают борелевским исключительным значением функции $f(z)$, если категория $N(r, a, f)$ меньше категории $T(r, f)$. Известно ([4], гл. IV), что не всякое борелевское исключительное значение является неванлинновским исключительным значением, и наоборот. Следующая теорема дополняет теоремы 1 и 2.

Теорема 3. *Все утверждения теорем 1 и 2 имеют место, если условие* $\delta(\infty, f)>0$ *заменить таким:* ∞ *является борелевским исключительным значением функции* $f(z)$.

4°. Пусть $u(z)$ — функция, представимая в виде разности двух субгармонических во всей плоскости функций $v_1(z)$ и $v_2(z)$; $m^+(r, u)$, $N(r, v_2)$, $T(r, u)=m^+(r, u)+N(r, v_2)$ — величины, характеризующие поведение функции $u(z)$ ([7]). Аналогично неванлинновскому определению дефекта в ∞, можно ввести величину $\delta_\infty(u)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}N(r, v_2)(T(r, u))^{-1}$.

Теорема 1 допускает частичное обобщение.

Теорема 4. *Пусть* $u(z)$ — *функция, представимая в виде* $u(z)=v_1(z)-v_2(z)$, *где* $v_1(z)$ *и* $v_2(z)$ — *субгармонические во всей плоскости функции. Предположим, что*

1) *функция* $u(z)$ *удовлетворяет во всей плоскости неравенству*

$$u(z)\geqslant -Cr^\alpha|\sin\varphi|^{-k},\quad \alpha>1,\quad k\geqslant 0;$$

2) $\delta(u)>0$;

3) $\ln\ln T(r, u)=O(\ln r)$;

4) *для всех* φ, $0<\varphi<\pi/2$,

$$\int\limits_{D^+(R,\varphi)\cup D^-(R,\varphi)} y|z|^{-2}\mu^+(dx\,dy)\leqslant CR^{\alpha-\gamma}|\sin\varphi|^{-k},$$

где $1<\gamma<\min(2, \alpha)$, $D^+(R, \varphi)=\{z:\ 2<|z|<R,\ |\arg z-\pi/2|\leqslant\pi/2-\varphi\}$, $D^-(R, \varphi)=\{z:\ 2<|z|<R,\ |\arg z+\pi/2|\leqslant\pi/2-\varphi\}$, $\mu(dx\,dy)$ — *риссовская масса функции* $u(z)$, $\mu^+(dx\,dy)$ — *положительная вариация* μ.

Тогда функция $u(z)$ *не выше нормального типа порядка* α.

Замечание. Без ограничений на меру $\mu^+(dx\,dy)$ теорема неверна. Действительно, функция $u(z)=|g(z)|$, где $g(z)$ — целая функция произвольного конечного порядка роста, удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 4, но рост $u(z)$ не ограничен сверху.

Выражаю признательность И. В. Островскому за руководство работой.

Военная инженерная радиотехническая академия противовоздушной обороны им. маршала А. Л. Говорова
Харьков

Поступило
17 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Мацаев, ДАН, 132, № 2 (1960). [2] В. И. Мацаев, ДАН, 139, № 4 (1961). [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965. [4] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, М., 1970. [5] У. Хейман, Мероморфные функции, М., 1966. [6] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. [7] И. И. Привалов, Субгармонические функции, М., 1937.