Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.94 *МАТЕМАТИКА*

И. Ц. ГОХБЕРГ, Ю. ЛАЙТЕРЕР

КРИТЕРИЙ ВОЗМОЖНОСТИ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНТУРА

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 12 VI 1971)

1. Пусть Γ — простая замкнутая гладкая кривая, разбивающая расширенную комплексную плоскость на два открытых множества F^+ и F^-. Предполагается, что точка $\zeta=0\in F^+$, а точка $\zeta=\infty\in F^-$.

Обозначим через $L(\mathfrak{H})$ алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и через $GL(\mathfrak{H})$ — группу обратимых операторов из $L(\mathfrak{H})$.

Факторизацией относительно контура Γ непрерывной на Γ оператор-функции $A\colon\ \Gamma\to L(\mathfrak{H})$ называется представление A в виде $A(\zeta)=A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, в котором множители обладают следующими свойствами: 1) оператор-функция $D(\zeta)$ имеет вид $D(\zeta)=P_0+\zeta^{\varkappa_1}P_1+\ldots+\zeta^{\varkappa_n}P_n$, где P_j, $j=1,2,\ldots,n$, являются дизъюнктными одномерными проекторами из $L(\mathfrak{H})$, $P_0=I-P_1-P_2-\ldots-P_n$ и $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_n$ — некоторые числа, отличные от нуля; 2) оператор-функции A_-, A_+ допускают продолжения, голоморфные внутри и непрерывные, включая границу, соответственно в множествах $F^-\cup\Gamma$ и $F^+\cup\Gamma$, причем все значения оператор-функций $A_\pm$ и их продолжений обратимы.

Числа $\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_n$ называются **частными индексами** оператор-функции A. Если $D(\zeta)\equiv I$, $\zeta\in\Gamma$, то факторизация называется **канонической**.

Обозначим через $\mathbf{L}_2=\mathbf{L}_2(\Gamma,\mathfrak{H})$ гильбертово пространство сильно измеримых функций $f\colon\ \Gamma\to\mathfrak{H}$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_\Gamma (f(\zeta),g(\zeta))_{\mathfrak{H}}\,|d\zeta|,\qquad f,g\in\mathbf{L}_2.$$

Оператор $\mathbf{P}$, определенный в $\mathbf{L}_2$ равенством

$$(\mathbf{P}f)(z)=\frac{f(z)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

является ограниченным проектором. Вектор-функции из его множества значений $\mathbf{L}_2^+=\operatorname{Im}\mathbf{P}$ допускают голоморфные продолжения в F^+, а вектор-функции из подпространства $\mathbf{L}_2^-=\operatorname{Im}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}=\mathbf{I}-\mathbf{P}$, допускают голоморфные продолжения в F^- и обращаются в нуль на бесконечности.

Через L_2 обозначим пространство $\mathbf{L}_2(\Gamma,\mathbf{C}^1)$ и через P и Q — соответствующие проекторы в L_2. Легко доказывается, что $\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{L}_2}=\|P\|_{L_2}$ и $\|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{L}_2}=\|Q\|_{L_2}$. В частности, если Γ — окружность, то $\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{L}_2}=\|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{L}_2}=1$.

Пусть $A\colon\ \Gamma\to L(\mathfrak{H})$ — непрерывная оператор-функция. Через $\mathbf{A}$ обозначим линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{L}_2$ по правилу $(\mathbf{A}f)(\zeta)=A(\zeta)f(\zeta)$, $f\in\mathbf{L}_2$, $\zeta\in\Gamma$.

Если непрерывная оператор-функция $A\colon\ \Gamma\to GL(\mathfrak{H})$ допускает факторизацию относительно контура Γ, то без труда доказывается, что операторы $\mathbf{PA}$ и $\mathbf{QA}^{-1}$ в соответствующих пространствах $\mathbf{L}_2^+$ и $\mathbf{L}_2^-$ являются Ф-операторами и имеют место равенства

$$\sum_{\varkappa_j>0} \varkappa_j = \dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA} = \dim \operatorname{Coker} \mathbf{QA}^{-1},$$

$$\sum_{\varkappa_j<0} \varkappa_j = \dim \operatorname{Ker} \mathbf{PA} = \dim \operatorname{Ker} \mathbf{QA}^{-1}.$$

Одной из основных теорем в этом сообщении является следующая

Теорема 1. *Пусть оператор-функция* A: $\Gamma \to L(\mathfrak{H})$ *голоморфна во всех точках* Γ. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Оператор-функция* A *допускает факторизацию относительно* Γ.

2) *Оператор* $\mathbf{PA}$ *является* Φ-*оператором в пространстве* $\mathbf{L}_2^+$.

3) *При всех* $\zeta \in \Gamma$ *оператор* $A(\zeta) \in GL(\mathfrak{H})$ *и оператор* $\mathbf{QA}^{-1}$ *является* Φ-*оператором в* $\mathbf{L}_2^-$.

2. Оператор-функции A: $\Gamma \to L(\mathfrak{H})$ называется конечномероморфной в точке ζ_0, если она либо голоморфна в точке ζ_0, либо имеет в этой точке полюс с конечномерной главной частью.

Оператор-функция A называется нормальной в точке ζ_0, если а) она конечномероморфна; б) значения правильной части A в точке является Φ-оператором; в) $A(\zeta) \in GL(\mathfrak{H})$ для всех ζ из проколотого круга $0 < |\zeta - \zeta_0| < \varepsilon$.

Оператор-функция A: $\Gamma \to GL(\mathfrak{H})$ называется вполне нормальной в F^+ (F^-), если она допускает продолжение в $\Gamma \cup F^+$ $(\Gamma \cup F^-)$, непрерывное на Γ и нормальное во всех точках F^+ (F^-).

Доказательство теоремы 1 основывается на результатах статьи ([1]) (см. также ([2])) и следующих двух вспомогательных предложениях.

Лемма 1. *Пусть оператор-функция* A: $\Gamma \to GL(\mathfrak{H})$ *голоморфна на* Γ *и пусть оператор* $\mathbf{PA}$ *является* Φ-*оператором в* $\mathbf{L}_2^+$, *тогда существуют оператор-функции* B_- *и* B_+: $\Gamma \to GL(\mathfrak{H})$, *вполне нормальные соответственно в* F^- *и* F^+, *такие, что оператор* $\mathbf{PB_-AB_+}$ *обратим в* $\mathbf{L}_2^+$.

Лемма 2. *Пусть оператор-функция* A: $\Gamma \to L(\mathfrak{H})$ *голоморфна на* Γ. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

α) *Оператор-функция* A *допускает каноническую факторизацию относительно* Γ.

β) *Оператор* $\mathbf{PA}$ *обратим в* $\mathbf{L}_2^+$.

γ) $A(\zeta) \in GL(\mathfrak{H})$ *для всех* $\zeta \in \Gamma$ *и оператор* $\mathbf{QA}^{-1}$ *обратим в* $\mathbf{L}_2^-$.

Из этой леммы, в частности, можно вывести основные результаты заметки ([3]) и их обобщения. Например, если оператор-функция A имеет вид $A = I - M$ и $\sup\|M(\zeta)\| < 1/\|P\|_{L_2}$, $\zeta \in \Gamma$, то оператор-функция A допускает каноническую факторизацию.

Отметим, что методы заметки ([3]) играют существенную роль в доказательстве леммы 2. Различные обобщения леммы 1 и дополнения к ней содержатся в ([4]).

3. В теореме 1 требование голоморфности оператор-функции A можно ослабить.

Пусть $\mathfrak{C}$ — банахова алгебра непрерывных оператор-функций A: $\Gamma \to L(\mathfrak{H})$, обладающая следующим свойством:

а) $\max\|A(\zeta)\|_{\mathfrak{H}} \leqslant C\|A\|_{\mathfrak{C}}$, $\zeta \in \Gamma$, $A \in \mathfrak{C}$, где C — константа, не зависящая от A.

Обозначим через $\mathfrak{C}^{\pm}$ множество всех оператор-функций из $\mathfrak{C}$, допускающих продолжения, голоморфные в $F^{\pm}$ и непрерывные вплоть до контура Γ. Очевидно, $\mathfrak{C}^{\pm}$ является замкнутой подалгеброй алгебры $\mathfrak{C}$. Положим $\mathfrak{C}_0^- = \{A\colon A \in \mathfrak{C}^-, A(\infty) = 0\}$. Очевидно, $\mathfrak{C}^+ \cap \mathfrak{C}_0^- = \{0\}$. Алгебра называется распадающейся, если $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^+ + \mathfrak{C}_0^-$.

Будем предполагать, что алгебра $\mathfrak{C}$ обладает еще следующими двумя свойствами:

б) Пусть $A \in \mathfrak{C}$; если для всех $\zeta \in \Gamma$ операторы $A(\zeta) \in GL(\mathfrak{H})$, то $A^{-1} \in \mathfrak{C}$;

в) Все голоморфные на Γ оператор-функции со значениями из $L(\mathfrak{H})$ принадлежат $\mathfrak{C}$ и образуют в $\mathfrak{C}$ плотное множество.

Примером распадающейся алгебры, обладающей свойствами а) — в) в случае $\Gamma = \{\zeta: |\zeta| = 1\}$, является винеровская алгебра W оператор-функций A: $\Gamma \to L(\mathfrak{H})$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды $A(\zeta) = = \ldots + A_{-1}\zeta^{-1} + A_0 + A_1\zeta + \ldots$ с нормой $\|A\|_W = \ldots + \|A_{-1}\| + \|A_0\| + + \|A_1\| + \ldots$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{C}$ — распадающаяся алгебра, обладающая свойствами* а) — в).

Тогда для любой оператор-функции $A \in \mathfrak{C}$ утверждения 1) — 3) *из теоремы* 1 *эквивалентны.*

Если одно из этих утверждений имеет место, то множители $A_\pm$ факторизации для A принадлежат соответственно подалгебрам $\mathfrak{C}_\pm$.

Эта теорема сохраняет силу, если в ее формулировке алгебру $\mathfrak{C}$ заменить на алгебру H_α, $0 < \alpha < 1$, всех оператор-функций A: $\Gamma \to L(\mathfrak{H})$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α.

Доказательство теоремы 2 основывается на теореме 1 и лемме о факторизации элементов, близких к единичному, в распадающихся банаховых алгебрах ((5), гл. 1, § 5; (6)).

Замечание. Пусть Γ_0 является единичной окружностью, и пусть оператор-функция F: $\Gamma_0 \to GL(\mathfrak{H})$ голоморфна на Γ_0. Если оператор $\mathbf{PF}$ является Φ_+- или Φ_--оператором, то оператор-функция F может не допускать факторизацию относительно контура Γ_0, даже со средним множителем более общего вида $D(\zeta) = \zeta^{\varkappa_0}P_0 + \zeta^{\varkappa_1}P_1 + \ldots + \zeta^{\varkappa_n}P_n$, в котором проекторы P_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, могут быть бесконечномерными. В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть $\mathfrak{H} = L_2(0, 1) \oplus L_2(0, 1)$ и оператор-функция F определена матрицей

$$F(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta(t-1) & \zeta^2 t \\ t & \zeta(t+1) \end{pmatrix}, \quad |\zeta| = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Легко видеть, что оператор $\mathbf{PF}$ обратим слева в $\mathbf{L}_2^+$. Вместе с этим $F(\zeta)$ не допускает факторизации с обобщенным средним множителем, так как можно показать, что оператор $\mathbf{PF}_1$, где $F_1 = \zeta^{-1}F$, не является нормально разрешимым оператором в пространстве $\mathbf{L}_2^+$.

4. Изложенные выше результаты обобщаются на банаховы пространства и контуры более общего вида. Из-за недостатка места мы не приводим здесь эти обобщения. Остановимся лишь на некоторых следствиях, вытекающих из этих обобщений.

Пусть $[S, \mu]$ — некоторое пространство с мерой и $L_p = L_p(S)$, $1 < p < \infty$, — банахово пространство измеримых функций φ: $S \to \mathbf{C}^1$ с нормой

$$\|\varphi\|_{L_p}^p = \int_S |\varphi(s)|\,\mu(ds) \quad (< \infty).$$

Через $\mathbf{L}_p$ обозначим банахово пространство сильно измеримых вектор-функций f: $\Gamma \to L_p(S)$, для которых

$$\|f\|_{\mathbf{L}_p}^p \overset{\mathrm{def}}{=} \int_\Gamma \|f(\zeta)\|_{L_p}^p\,|d\zeta| < \infty.$$

Без труда доказывается, что если $1 < p < \infty$, то $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ являются линейными ограниченными проекторами в пространстве $\mathbf{L}_p$, причем

$$\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{L}_p} = \|P\|_{L_p}, \quad \|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{L}_p} = \|Q\|_{L_p},$$

где P — соответствующий проектор, действующий в пространстве $L_p = = L_p(\Gamma)$, и $Q = I - P$.

Все результаты пп. 1 — 3 сохраняют силу, если в их формулировках заменить $\mathfrak{H}$ на $L_p(S)$ и $\mathbf{L}_2$ — на $\mathbf{L}_p$, $1 < p < \infty$.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — произвольное банахово пространство и K — замкнутое кольцо, содержащее внутри себя контур Γ. Обозначим через $C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$ банахову алгебру всех оператор-функций A: $K \to L(\mathfrak{B})$, непрерывных на K и голоморфных во всех внутренних точках K. Аналогично, через $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ обозначим банахово пространство всех вектор-функций f: $K \to \mathfrak{B}$, непрерывных на K и голоморфных во всех внутренних точках K.

Обозначим через C_ω^+ подпространство из $C_\omega(K, \mathfrak{B})$, состоящее из всех вектор-функций, допускающих голоморфное продолжение в F^+. Через C_ω^- обозначим подпространство вектор-функций из $C_\omega(K, \mathfrak{B})$, допускающих голоморфное продолжение на F^- и обращающихся в нуль на бесконечности. Легко видеть, что $C_\omega(K, \mathfrak{B}) = C_\omega^+ \dotplus C_\omega^-$. Обозначим через $\mathbf{P}$ проектор, проектирующий $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ на C_ω^+ параллельно C_ω^-, и через $\mathbf{Q}$ — дополнительный проектор $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$.

Если $A \in C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$, то, как прежде, через $\mathbf{A}$ обозначим оператор, определенный в пространстве $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ равенством $(\mathbf{A}f)(\zeta) = A(\zeta)f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$.

Теорема 3. *Пусть оператор-функция $A \in C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$ и все ее значения $A(\zeta) \in GL(\mathfrak{B})$, $\zeta \in K$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *Оператор-функция A допускает факторизацию относительно* Γ.

2) *Оператор* $\mathbf{PA}$ *является* Φ-*оператором в подпространстве* C_ω^+.

3) *Оператор* $\mathbf{QA}^{-1}$ *является* Φ-*оператором в подпространстве* C_ω^-.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР

Кишиневский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
23 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Гохберг, Ю. Лайтерер, Math. Nachrichten, 52, H. 1—6, 529 (1972). [2] И. Ц. Гохберг, Изв. АН АрмССР, Математика, 6, №№ 2—3, 160 (1971). [3] И. Ц. Гохберг, Ю. Лайтерер, Функциональный анализ и его приложения, 6, в. 1, 73 (1972). [4] И. Ц. Гохберг, Ю. Лайтерер, Е. М. Шпигель, Математические исследования, Кишинев, 7, в. 3, 87 (1972). [5] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. [6] М. С. Будяну, И. Ц. Гохберг, Математические исследования, Кишинев, 2, в. 2, 1967, стр. 25.