Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

И. Л. КАНТОР

МОДЕЛИ ОСОБЫХ АЛГЕБР ЛИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 V 1972)

В данной заметке построены модели особых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Каждая модель представляет собой градуированную алгебру Ли вида

$$\mathcal{U}_{-2} + \mathcal{U}_{-1} + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \qquad (1)$$

с конкретно указанным законом коммутирования между подпространствами $\mathcal{U}_i$.

Частный случай, когда $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{-2} = 0$, рассматривался в работе автора [4], где была предложена конструкция, позволяющая для каждой йордановой алгебры с единицей построить алгебру Ли вида

$$\mathcal{U}_{-1} + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1. \qquad (2)$$

На этом пути возникла модель особой алгебры Ли E_7. (Отметим, что указанное соответствие между йордановыми алгебрами и алгебрами Ли вида (2) было позже рассмотрено М. Кехером [7], не заметившим совпадения своего подхода с методом автора; близкая конструкция была предложена ранее Ж. Титцем [11].)

Более общий способ, рассмотренный К. Майбергом [8], позволяющий строить алгебры Ли (2), исходя из йордановых трилинейных операций, добавляет модель особой алгебры Ли E_6.

В данной заметке дается конструкция алгебр Ли вида (1), охватывающая указанные выше частные случаи алгебр $\mathcal{U}_{-1} + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1$. Алгебра Ли (1) строится, исходя из произвольной обобщенно-йордановой операции 2-го порядка (определение см. ниже). На таком пути возникает, помимо указанных выше моделей E_6 и E_7, еще 11 моделей особых алгебр Ли.

1°. Пусть $\mathcal{U}$ — линейное пространство и φ — трилинейная операция на $\mathcal{U}$, т. е. линейное отображение $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Условимся наряду с $\varphi(x, y, z)$ писать также (yxz) *.

Определение 1. Трилинейную операцию (yxz) будем называть обобщенно-йордановой, если имеет место тождество

$$(xu(yvz)) = ((xuy)vz) - (y(uxv)z) + (yv(xuz)). \qquad (3)$$

Отметим, что частным случаем являются трилинейные операции, введенные Н. Джекобсоном [2], называемые просто йордановыми, они выделяются из обобщенно-йордановых дополнительным условием $(yxz) = (zxy)$.

В работе автора [6] было введено отображение $\mathcal{L}$, ставящее каждой обобщенно-йордановой трилинейной операции φ в соответствие некоторую градуированную алгебру Ли $\mathcal{L}(\varphi)$, причем операция φ называлась операцией порядка k, если

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{U}_{-k} + \ldots + \mathcal{U}_{-1} + \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_k.$$

Заметим, что операции порядка 1 — это в точности йордановы трилинейные операции.

* Обратим внимание, что в этой записи первый аргумент x стоит на втором месте, а второй аргумент y — на первом; при таком способе записи интересующие нас тождества принимают более естественный вид.

В данной заметке будет рассмотрен случай $k=2$. Для этого случая мы дадим другое (но эквивалентное) определение обобщенно-йордановой операции 2-го порядка и соответствующей алгебры $\mathscr{L}(\varphi)$.

Определение 2. Обобщенно-йорданову трилинейную операцию будем называть операцией 2-го порядка, если имеет место тождество

$$[((avb)uc)-(cu(avb))-(cv(aub))-(a(vcu)b)]_{a,b}=0, \tag{4}$$

где символ $[\ldots]_{a,b}$ означает альтернацию по a и b.

Для того чтобы определить алгебру Ли $\mathscr{L}(\varphi)$, введем такие обозначения: S_{uv}, K_{uv} — линейные операторы, определенные формулами

$$S_{uv}(x)=(uvx), \quad K_{uv}(x)=(uxv)-(vxu); \tag{5}$$

$\mathscr{S}$ и $\mathscr{K}$ — пространства, составленные из всех линейных комбинаций операторов S_{uv} и K_{uv} (соответственно):

$$\mathscr{S}=\{S_{uv}\}, \quad \mathscr{K}=\{K_{uv}\}.$$

Рассмотрим теперь следующую прямую сумму линейных пространств:

$$\mathscr{K}\dotplus\mathscr{U}\dotplus\mathscr{S}\dotplus\overline{\mathscr{U}}\dotplus\overline{\mathscr{K}}, \tag{6}$$

где $\overline{\mathscr{K}}$ и $\overline{\mathscr{U}}$ — «вторые» экземпляры пространств $\mathscr{K}$ и $\mathscr{U}$. На этом пространстве мы определим структуру градуированной алгебры Ли (1), где $\mathscr{U}_{-2}$, $\mathscr{U}_{-1}$, $\mathscr{U}_0$, $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ — это соответственно пространства $\mathscr{K}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{S}$, $\overline{\mathscr{U}}$, $\overline{\mathscr{K}}$. Эта алгебра будет обладать инволютивным автоморфизмом τ, который элементы из $\mathscr{K}$ и $\mathscr{U}$ переводит в их «двойники» из $\overline{\mathscr{K}}$, $\overline{\mathscr{U}}$, а элементы из $\mathscr{S}$ снова в элементы из $\mathscr{S}$ по формуле $\tau(S_{ab})=-S_{ba}$.

Учитывая, что конструируемая алгебра (6) должна быть градуированной, а отображение τ — автоморфизмом, достаточно определить коммутаторы $[\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_0]$, $[\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_{-1}]$, $[\mathscr{U}_{-1}, \mathscr{U}_1]$, $[\mathscr{U}_{-1}, \mathscr{U}_1]$, $[\mathscr{U}_0, \mathscr{U}_{-2}]$, $[\mathscr{U}_{-2}, \mathscr{U}_2]$, $[\mathscr{U}_{-2}, \mathscr{U}_1]$.

Зададим их следующими формулами:

$$[S_1, S_2]=S_1S_2-S_2S_1, \quad [S, a]=S(a), \quad [a, \bar{b}]=S_{ab}, \tag{7}$$
$$[a, b]=K_{ab}, \quad [S, K]=SK-K\bar{S}, \quad [K_1, \overline{K}_2]=K_1K_2, \quad [K, \bar{a}]=K(a),$$

где $a, b\in\mathscr{U}$; $S, S_1, S_2\in\mathscr{S}$; $K, K_1, K_2\in\mathscr{K}$, а черта над элементом означает применение τ.

Предложение 1. *Пространство (6) с описанной выше операцией коммутирования является градуированной алгеброй Ли, а τ — ее инволютивным автоморфизмом.*

Обозначим эту градуированную алгебру через $\mathscr{L}(\varphi)$, где φ — обобщенно-йорданова трилинейная операция 2-го порядка.

Предложение 2. *Если исходная операция φ простая*, то алгебра Ли $\mathscr{L}(\varphi)$ простая или полупростая (в последнем случае $\mathscr{L}(\varphi)$ состоит из двух изоморфных простых компонент).*

Определение 3. Две трилинейные операции $[yxz]$ и (yxz) называются слабо изоморфными, если существуют такие взаимно однозначные линейные отображения P и Q пространства первой операции в пространство второй, что имеет место

$$P([yxz])=(P(y)Q(x)P(z)).$$

Предложение 3. *Две обобщенно-йордановы трилинейные операции φ и ψ слабо изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие алгебры Ли $\mathscr{L}(\varphi)$ и $\mathscr{L}(\psi)$ изоморфны.*

---

* Как обычно, трилинейная операция $\varphi(x, y, z)$ называется простой, если не существует такого подпространства $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$, что

$$\varphi(\mathscr{U}', \mathscr{U}, \mathscr{U})\subset\mathscr{U}', \quad \varphi(\mathscr{U}, \mathscr{U}', \mathscr{U})\subset\mathscr{U}', \quad \varphi(\mathscr{U}, \mathscr{U}, \mathscr{U}')\subset\mathscr{U}'.$$

В работе ([6]) для случая алгебраически замкнутого поля характеристики нуль получена классификация с точностью до слабой изоморфности обобщенно-йордановых трилинейных операций 2-го порядка, для которых соответствующие алгебры Ли $\mathscr{L}(\varphi)$ являются простыми. Эта классификация с исключением операций 1-го порядка содержит 7 бесконечных серий и 11 «изолированных» операций. Все алгебры Ли $\mathscr{L}(\varphi)$, отвечающие операциям бесконечных серий, являются классическими, в то время как изолированным операциям отвечают особые алгебры Ли.

Таким образом, рассматривая эти изолированные операции и соответствующие им, согласно предложению 1, алгебры $\mathscr{L}(\varphi)$, мы получаем 11 различных моделей особых алгебр Ли. Из них четыре были построены ранее Х. Фрейденталем (на ином пути ([3])), остальные являются, по-видимому, новыми (хотя четыре из них имеют отношение к моделям, построенным Ж. Титцем ([12]) и Э. Винбергом ([1]), см. 3°).

Дальнейшая часть заметки содержит описание этих 11 операций, представленных в более простом по сравнению с ([6]) виде (отметим, что отличаются также обозначения некоторых операций).

2°. Описание изолированных операций начнем со случая, когда операция удовлетворяет условию

$$K_{ab}(x) = (axb) - (bxa) = \langle a, b\rangle J(x), \tag{8}$$

где $\langle a, b\rangle$ — кососимметрическая форма, а J — некоторый фиксированный линейный оператор. Это условие означает $\dim \mathscr{U}_{-2} = 1$.

Можно показать, что в данном случае трилинейная операция

$$\{yxz\} = (yJ(x)z) + {}^1/_2(\langle z, y\rangle x + \langle y, x\rangle z + \langle z, x\rangle y) \tag{9}$$

является трилинейной операцией Фрейденталя (см. определения и частичную классификацию в ([10])). Более того, все возможные трилинейные операции Фрейденталя могут быть получены на этом пути.

Таким образом мы получаем, что существует ровно пять особых операций Фрейденталя. При этом к четырем известным (см. ([3])) особым операциям Фрейденталя (приводящим к моделям для алгебр Ли F_4, E_6, E_7, E_8) добавляется еще одна операция, дающая модель G_2.

Дадим сначала описание четырех обобщенно-йордановых операций (yxz), которым соответствуют (по формуле (9)) четыре операции $\{yxz\}$, рассмотренные Х. Фрейденталем. Эти операции связаны с йордановыми алгебрами B_3, A_3, C_3, E_3. Зафиксируем одну из четырех указанных йордановых алгебр — обозначим ее V — и рассмотрим пространство $N(V)$; состоящее из четверок $(\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, где α_1, α_2 — числа, а $a_1, a_2 \in V$. На этом пространстве зададим операцию умножения, которую удобно записать в «матричной форме»:

$$A \circ B \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \beta_2 & b_1 \\ b_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} \alpha_1\beta_1 + (a_1, b_2) & \alpha_1 b_1 + \beta_2 a_1 + a_2 \times b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \beta_1 a_2 + \alpha_2 b_2 + b_1 \times a_1 & \alpha_2 b_2 + (a_2, b_1) \end{array}\right),$$

где

$$a \times b = ab + {}^1/_2\sigma_1(a)b + {}^1/_2\sigma_2(b)a + \sigma_2(a, b)\cdot 1, \quad (a, b) = \sigma_1(ab),$$

ab — произведение в йордановой алгебре, а линейная и билинейная формы $\sigma_1(a)$ и $\sigma_2(a, b)$ суть коэффициенты характеристического уравнения $x^3 + \sigma_1(x)x^2 + \sigma_2(x, x)x + \sigma_3(x, x, x)\cdot 1 = 0$.

На пространстве $N(V)$ определим с помощью операции $\circ$ трилинейную операцию $\varphi(N(V))$ следующим образом:

$$(BAC) = B \circ (\bar{A} \circ C) + C \circ (\bar{A} \circ B) - A \circ (\bar{B} \circ C), \tag{10}$$

где черта означает инволюцию $(\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2) \to (\alpha_2, \alpha_1, a_1, a_2)$.

Пятая операция $\varphi(B_{222})$ (для которой алгебра Ли $\mathscr{L}(\varphi)$ есть G_2) определена на множестве B_{222} всех симметрических тензоров a_{ijk} двумерного пространства $(i, j, k = 1, 2)$ по формуле

$$u_{ijk} = y_{i\alpha\beta}x_{\gamma\alpha\beta}z_{\gamma jk} + y_{\alpha jk}x_{\alpha\beta\gamma}z_{i\beta\gamma} + y_{\alpha\beta k}x_{\alpha\beta\gamma}z_{ij\gamma} - y_{\alpha\beta\gamma}x_{\alpha\beta\gamma}z_{ijk}$$

(что соответствует $u = (yxz)$), где по каждому греческому индексу производится суммирование от 1 до 2.

Итак, мы описали 5 операций $\varphi(N(B_3))$, $\varphi(N(A_3))$, $\varphi(N(C_3))$, $\varphi(N(E_3))$, $\varphi(B_{222})$, отвечающих случаю $\dim \mathcal{U}_{-2} = 1$.

3°. Для остальных 6 операций $\dim \mathcal{U}_{-2} > 1$. В этом пункте будет дано описание четырех из них. Рассмотрим алгебры

$$\mathrm{O}, \quad \mathrm{O} \otimes \mathrm{K}, \quad \mathrm{O} \otimes \mathrm{Q}, \quad \mathrm{O} \otimes \mathrm{O},$$

где K, Q, O обозначают соответственно алгебры комплексных чисел, кватернионов, октав, а сивол $\otimes$ — тензорное произведение алгебр. Каждой из указанных четырех алгебр поставим в соответствие трилинейную операцию по формуле (10), где $\bar{A} \equiv \overline{a_1 \otimes a_2} = \bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2$ ($\bar{a}_i$ обозначает сопряженный элемент к a_i в соответствующей алгебре K, Q или O).

Алгебры $\mathcal{L}(\varphi)$ для построенных трилинейных операций $\varphi(\mathrm{O})$, $\varphi(\mathrm{O} \otimes \mathrm{K})$, $\varphi(\mathrm{O} \otimes \mathrm{Q})$, $\varphi(\mathrm{O} \otimes \mathrm{O})$ суть F_4, E_6, E_7, E_8.

4°. Последние две трилинейные операции определены: одна на пространстве C_{777} всех кососимметрических тензоров a_{ijk} в семимерном пространстве по формуле

$$u_{ijk} = y_{i\alpha\beta}x_{\gamma\alpha\beta}z_{\gamma jk} + y_{\alpha jk}x_{\alpha\beta\gamma}z_{i\beta\gamma} + \lambda y_{\alpha\beta k}x_{\alpha\beta\gamma}z_{ij\gamma} - \mu y_{\alpha\beta\gamma}x_{\alpha\beta\gamma}z_{ijk} \qquad (11)$$

(что соответствует $u = (yxz)$), где $\lambda = 1$, $\mu = {}^1/_3$ и по каждому греческому индексу производится суммирование от 1 до 7; другая — на пространстве $C_{55}{}^2$ всех тензоров a_{ijk}, кососимметрических по i и j, причем $i, j = 1, 2, \ldots, 5$, а $k = 1, 2$, и задается формулой (11) при $\lambda = {}^1/_2$, $\mu = {}^1/_2$ (разумеется, в этом случае суммирование производится по первым двум индексам от 1 до 5, а по третьему от 1 до 2). Определенные таким образом операции обозначим $\varphi(C_{777})$ и $\varphi(C_{55}{}^2)$. Соответствующие им алгебры $\mathcal{L}(\varphi)$ суть E_7 и E_6.

Резюмируя содержание пп. 2°) — 4°), получим

Предложение 4. *Алгебра Ли* $\mathcal{L}(\varphi)$, *определенная в предложении* 1, *для операции* $\varphi(B_{222})$ *является алгеброй Ли* G_2; *для операций* $\varphi(N(B_3))$ *и* $\varphi(\mathrm{O})$ — *алгеброй Ли* F_4, *для операций* $\varphi(N(A_3))$, $\varphi(\mathrm{O} \otimes \mathrm{K})$, $\varphi(C_{55}{}^2)$ — *алгеброй Ли* E_6, *для операций* $\varphi(N(C_3))$, $\varphi(\mathrm{O} \otimes \mathrm{Q})$, $\varphi(C_{777})$ — *алгеброй Ли* E_7 *и для операций* $\varphi(N(E_3))$, $\varphi(\mathrm{O} \otimes \mathrm{O})$ *алгеброй Ли* E_8. *Указанными моделями исчерпываются все модели особых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль в виде градуированных алгебр* (1).

В заключение отметим, что рассмотрение обобщенно-йордановых операций порядков $k > 2$ также приводит к различным моделям особых алгебр Ли.

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт
Москва

Поступило
4 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Б. Винберг, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 13, 7 (1966). [2] N. Jecobson, Am. J. Math., 71, 149 (1949). [3] X. Freudental, Indag. math., 16, 363 (1954). [4] И. Л. Кантор, ДАН, 158, № 6, 1271 (1964). [5] И. Л. Кантор, Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 13 (1966). [6] И. Л. Кантор, Там же, 16 (1972). [7] M. Koecher, Am. J. Math., 89, № 3 (1967). [8] K. Meuberg, Math. Zs., 115, № 1 (1970). [9] K. Meyberg, Manuscripta Math., 3, № 2 (1970). [10] K. Meyberg, Indag. Math., 30, 162 (1968). [11] I. Titc, ibid., 24, 530 (1962). [12] I. Titc, ibid., 28, № 3 (1966).