Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 24–32

УДК 512. 542

ОБ $\mathfrak{F}$-ДОСТИЖИМЫХ ПОДГРУППАХ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р. В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: borodich@gsu.by
Поступила 05.10.2023

В работе изучается поведение $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп относится к одному из классических направлений теории конечных групп. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 года. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах таких авторов, как Л. А. Шеметков [2], М. В. Селькин [3], А. Баллестер-Болинше [4], Д. Бейдлеман и Ш. Смит [5] и многих других (см. монографии [2, 3]).

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [5] был поставлен следующий вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?». Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [3]). В данной работе дается ответ на более общий вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа. В каком случае из $H/\Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$ будет следовать, что $H \in \mathfrak{F}$?».

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$-достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G,$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$-субнормальной.

Понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы, введенное О. Кегелем в работе [6], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп во фраттиниевых расширениях конечных групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [7] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть:

1) абнормально полным, если для любой группы G среди элементов множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G;

2) абнормальным, если $\theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных подгрупп;

3) тривиальным, если функтор θ выделяет в группе G все ее подгруппы.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto Aut(G)$, где $Aut(G)$ – группа автоморфизмов группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, т. е. $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [8].

С используемыми в работе определениями и обозначениями можно ознакомиться в публикациях [8, 9].

Пусть $\Phi_{\theta}(G, A) \neq G$. Определим подгруппу $\widetilde{F}_{\theta}(G, A)$ группы G следующими двумя условиями:

1) $\widetilde{F}_{\theta}(G, A) \supseteq \Phi_{\theta}(G, A)$;

2) $\widetilde{F}_{\theta}(G, A) / \Phi_{\theta}(G, A) = Soc(G / \Phi_{\theta}(G, A))$.

На подгруппу $\widetilde{F}_{\theta}(G, A)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга $F(G)$, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы – содержать свой централизатор.

2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты об $\mathfrak{F}$-достижимых подгруппах.

Лемма 2.1 [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, H, K и N – подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K, а HN / N – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G / N;*

2) *если $H \supseteq N$, то подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H / N $\mathfrak{F}$-достижима в G / N;*

3) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G.*

Лемма 2.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда $\Phi(G) \subseteq \Phi(G, A)$.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi(G) \nsubseteq \Phi(G, A)$. Тогда существует максимальная A-допустимая подгруппа M такая, что $M \nsupseteq \Phi(G)$. Так как $\Phi(G)$ является характеристической подгруппой, то $\Phi(G)$ – A-допустима. Так как произведение A-допустимых подгрупп является A-допустимым, то $M\Phi(G) = G$. Учитывая, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, получаем, что $M = G$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 2.3 [2]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$, для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 2.4 [8]. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный функтор,* $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, N *–* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $K \subseteq \Phi_\theta(G,A)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если* N/K π*-замкнута, то и* N π*-замкнута;*

2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Если субнормальная* A*-допустимая подгруппа* H *группы* G *содержит* $O_\pi(\Phi_\theta(G,A))$ *и* $H/O_\pi(\Phi_\theta(G,A)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Согласно теореме 4.3 гл. IV [6] $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{E}_\pi$ классе всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi_\theta(G,A)$ – π-группа. Таким образом H – π-группа и $H/\Phi_\theta(G,A) \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно лемме 2.4 $F_p(G/\Phi_\theta(G,A)) = F_p(G)/\Phi_\theta(G,A)$, получаем, что $F_p(H/\Phi_\theta(G,A)) = F_p(H)/\Phi_\theta(G,A)$. Так как $H/\Phi_\theta(G,A) \in \mathfrak{F}$, то, используя леммы 2.3 и 2.4, получаем, что

$$(H/\Phi_\theta(G,A))/F_p(H/\Phi_\theta(G,A)) = H/\Phi_\theta(G,A)/F_p(H)/\Phi_\theta(G,A) \simeq$$
$$\simeq H/F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 2.3 подгруппа H входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{F}$ содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi = \mathbb{P}$ и теорема 3.1 дает ответ на вопрос: «Если H – субнормальная подгруппа группы G, такая, что $H/\Phi_\theta(G,A) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$».

Если группа операторов A единична, а θ – абнормальный подгрупповой функтор, то подгруппа $\Phi_\theta(G,A)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ и из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Если субнормальная подгруппа* H *группы* G *содержит* $O_\pi(\Delta(G)(G))$ *и* $H/O_\pi(\Delta(G)(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, а θ – тривиальный подгрупповой функтор, то подгруппа $\Phi_\theta(G,A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. *Если субнормальная подгруппа* H *группы* G *содержит* $O_\pi(\Phi(G))$ *и* $H/O_\pi(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$, *то* $H \in \mathfrak{F}$.

Замечание. Если локальная формация $\mathfrak{F}$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H, не всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_p$ – насыщенная формация всех p-групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ циклическая группа порядка p^2q^2. Если $H = C_{p^2}\Phi_\theta(G)$, тогда $H \triangleleft G$ и $H/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, но $H \notin \mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|)=1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация. Если* N *– субнормальная* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $N/N \cap \Phi_\theta(G,A) \in \mathfrak{F}$. *Тогда* N *представима в виде прямого произведения* $N = N_1 \times N_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi_\theta(G, A)$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 3.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$, то $N / D \simeq N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi_\theta(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 2.3 и лемму 2.4, получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) = N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1 \simeq N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 2.3 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 3.2.1. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если* N *– субнормальная* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $N / N \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, *то* $N \in \mathfrak{F}$.

Теорема 3.3. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$, θ *– абнормально полный подгрупповой функтор,* $C_G(\widetilde{F}_\theta(G, A)) \subseteq F(G)$ *для любой группы* G.

Доказательство. Положим $H = \widetilde{F}_\theta(G, A)$, $C = C_G(H)$, $F = F(G)$. Если $\Phi_\theta(G, A) \neq 1$, то рассматриваем $G / \Phi_\theta(G, A)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда

$$C\Phi_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A) \subseteq F / \Phi_\theta(G, A) = F(G / \Phi_\theta(G, A)),$$

откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Phi_\theta(G, A) = 1$. Ввиду того, что подгруппа Фиттинга $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G, получаем, что $F \subseteq C$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой главный фактор N / F группы G, что $N \subseteq C$. Так как $Soc(N)$ содержится в H, следовательно, он централизуется подгруппой N. Если $N \neq G$, то по индукции $N = F(N) = F(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, т. е. G / F – главный фактор группы G. По лемме 7.9 из [2]

$$G = LF,\ L \cap F = 1,\ F \subseteq H.$$

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G / F \simeq L$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и, несложно заметить, $L = G'$. Значит, L является минимальной нормальной подгруппой группы G, т. е. $L \subseteq H$. Но это невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация,* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор и группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|,|A|) = 1$. *Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая* A*-допустимая подгруппа группы* G *и* $H / H \cap \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$, *то* H *представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\theta(G, A)$.

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то она, очевидно, $\mathfrak{G}_\pi$-достижима в G, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа $H\Phi_\theta(G, A) / \Phi_\theta(G, A)$ $\mathfrak{G}_\pi$-достижима в группе $G / \Phi_\theta(G, A)$. Значит, на основании работы [5] имеем, что

$$H\Phi_\theta(G,A)/\Phi_\theta(G,A)\subseteq O_\pi(G/\Phi_\theta(G,A)).$$

Пусть $O_\pi(G/\Phi_\theta(G,A))=K/\Phi_\theta(G,A)$. По теореме 3.2 подгруппа K представима в виде $K=K_1\times K_2$, где K_1 – π-группа, $\pi(K_2)\cap\pi=\varnothing$, $K_2\subseteq\Phi_\theta(G,A)$. Пусть H_1 – холловская π-подгруппа группы H, H_2 – холловская π'-подгруппа группы H. Очевидно, $H_1\subseteq K_1$, $H_2\subseteq K_2$. Поэтому $H=H_1\times H_2$, причем, H_1 – π-группа, $\pi(H_2)\cap\pi=\varnothing$, $H_2\subseteq\Phi_\theta(G,A)$.

Покажем, что $H_1\in\mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа T, такая, что из $T/T\cap\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$ следует равенство $T=T_1\times T_2$, где T_1 – π-группа, $\pi(T_2)\cap\pi=\varnothing$, $T_2\subseteq\Phi_\theta(G,A)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H, имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1\neq 1$. Поэтому $O_\pi(G)\neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как
$$H\Phi_\theta(G,A)N/\Phi_\theta(G,A)N\simeq H\Phi_\theta(G,A)/H\Phi_\theta(G,A)\cap\Phi_\theta(G,A)N,$$
то $H\Phi_\theta(G,A)N/\Phi_\theta(G,A)N\in\mathfrak{F}$. С другой стороны, $H\Phi_\theta(G,A)N/\Phi_\theta(G,A)N\simeq$ $\simeq HN/HN\cap\Phi_\theta(G,A)N$. Поэтому $HN/HN\cap\Phi_\theta(G,A)N\in\mathfrak{F}$.

Так как $\Phi_\theta(G,A)N/N\subseteq\Phi_\theta(G/N,A)$, то $(HN/N)/(HN/N)\cap\Phi_\theta(G/N,A)\in\mathfrak{F}$.

Кроме того, на основании леммы 2.1 подгруппа HN/N $\mathfrak{F}$-достижима в группе G/N. Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1N/N\in\mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично доказывается, что $H_1L/L\in\mathfrak{F}$. Отсюда следует, что
$$H_1/L\cap N\simeq H_1\in\mathfrak{F}.$$
Пришли к противоречию.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Из $N\subseteq\Phi_\theta(G,A)\cap O_\pi(G)$ следует, что N – абелева p-группа для некоторого $p\in\pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $H_2=1$, $H=H_1$ и $HN/N\in\mathfrak{F}$. Если N не содержится в H, то $|G:HN|<|G:H|$. Кроме того, $HN/HN\cap\Phi_\theta(G,A)\in\mathfrak{F}$. Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN\in\mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $H\in\mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Значит, в дальнейшем полагаем, что $N\subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь
$$H=H_0\subseteq H_1\subseteq\ldots\subseteq H_n=HO_p(G),$$
что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}.

Пусть $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i. По теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)}\subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{F}}\subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i=H_{i-1}(O_p(G)\cap H_i)$, то
$$H_i/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G)\cap H_i)\simeq H_{i-1}/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G)\cap H_{i-1}).$$
Поэтому
$$(H_i)^{f(p)}\subseteq(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G)\cap H_i).$$

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \qquad (*)$$

По лемме 2.3, для любого $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'p}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [2] $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как $H_j O_j(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j \cap O_p(G)$. Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)_{p'}^{f(p)} (H_j)^{\mathfrak{F}},$$

где $(H_j)_{p'}^{f(p)}$ – холловская p'-подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства $(*)$ следует, что холловская p'-подгруппа $(H_{i-1})_{p'}^{f(p)}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p'-подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})_{p'}^{f(p)} (H_i)^{\mathfrak{F}}.$$

Так как $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа $(H / N)^{f(p)} = H^{f(p)} N / N$ является субнормальной подгруппой группы $(H / N) O_p(G / N)$. Так как $H / N \in \mathfrak{F}$, то

$$(H / N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H / N).$$

Из субнормальности $(H / N)^{f(p)}$ в $HO_p(G) / N$ следует, что

$$(H / N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G) / N).$$

Значит,

$$(H / N)^{f(p)} O_p(G / N) \subseteq O_{p'p}(HO_p(G) / N).$$

Так как

$$HO_p(G) / H^{f(p)} O_p(G) \simeq H / H \cap H^{f(p)} O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G) / N) / O_{p'p}(HO_p(G) / N) \in f(p).$$

Используя теорему 4.1 из [2], получаем, что все главные факторы группы $HO_p(G) / N$, содержащиеся в $O_p(G) / N$, являются $\mathfrak{F}$-центральными. Поэтому из $HO_p(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $HO_p(G) / N \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\mathfrak{F}$-достижима в группе G. Так как

$$| G : HO_p(G) | < | G : H |,$$

то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \mathfrak{F}$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть φ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G / \Phi_\theta(G, A)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi_\theta(G, A) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \varphi^{-1}(O_p(G^\varphi))$ – полный прообраз подгруппы

$O_p(G^{\varphi})$. На основании теоремы 3.2 подгруппа S представима в виде $S = S_1\Phi_\theta(G, A)$, где S_1 – холловская p'-подгруппа группы S. Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^{\varphi}) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^{φ} являются p-группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^{φ}. Предположим, что K не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда $K = K^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа H^{φ} $\mathfrak{F}$-достижима в G^{φ}, то из работы [10] $K \subseteq N_{G^{\varphi}}(H)$. Значит, $K \cap H^{\varphi}$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^{\varphi})^{\mathfrak{F}} = K \cap H^{\varphi}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $(K \cap H^{\varphi})^{\mathfrak{F}} \subseteq (H^{\varphi})^{\mathfrak{F}}$. Теперь из $H^{\varphi} \in \mathfrak{F}$ следует, что $K \cap H^{\varphi} = 1$. Значит, $KH^{\varphi} = K \times H^{\varphi}$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{F}$. Предположим, что K не содержится в H^{φ}. Так как подгруппа H^{φ} $\mathfrak{F}$-достижима в $H^{\varphi}K$, то существует такая цепь

$$H^{\varphi} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = H^{\varphi}K,$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. В частности, либо подгруппа H^{φ} нормальна в группе H_1, либо $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}$.

Пусть $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}$. Так как $H^{\varphi}K / K \in \mathfrak{F}$, то $(H^{\varphi}K)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$-достижима в $H^{\varphi}K$, то ввиду леммы 2.1 $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы $H^{\varphi}K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times \ldots \times K_n$, где K_i – изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} = K_1 \times \ldots \times K_m$, где $k < m$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^{φ}, содержащаяся в $(H_1)^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^{\varphi}K$. Так как $L \subseteq H^{\varphi}$, то

$$H^{\varphi}K = H^{\varphi}(LC_K(L)) = H^{\varphi}C_K(L) = H^{\varphi}C_{H^{\varphi}K}(L).$$

Поэтому

$$H^{\varphi}K / C_{H^{\varphi}K}(L) = H^{\varphi}C_{H^{\varphi}K}(L) / C_{H^{\varphi}K}(L) \simeq H^{\varphi} / H^{\varphi} \cap C_{H^{\varphi}K}(L) = H^{\varphi} / C_{H^{\varphi}}(L).$$

Так как $H^{\varphi} \in \mathfrak{F}$, то $H^{\varphi} / C_{H^{\varphi}}(L) \in f(L)$. Но тогда $H^{\varphi}K / C_{H^{\varphi}K}(L) \in f(L)$, т. е. L – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы $H^{\varphi}K$. Так как формация $f(L)$ наследственна, то L – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы H_1. Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ следует, что все H_1-главные факторы группы $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-центральны в H_1. Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$-достижима в H_1K, а подгруппа $H_1K = H^{\varphi}K$ $\mathfrak{F}$-достижима в G^{φ}, то H_1 – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G^{φ}. Пусть $\varphi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1. Тогда $\varphi^{-1}(H_1)$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, $\varphi^{-1}(H_1) / \Phi_\theta(G, A) \in \mathfrak{F}$ и $|G : \varphi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы H имеем, что $\varphi^{-1}(H_1) \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^{φ} нормальна в H. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1 / H^{φ} – простая группа. Предположим, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \nsubseteq H^{\varphi}$. Тогда

$$H_1 = H^{\varphi}(H_1)^{\mathfrak{F}} = H^{\varphi}(K_1 \times \ldots \times K_m).$$

Так как

$$H_1 / H^{\varphi} \simeq K_1 \times \ldots \times K_m / K_1 \times \ldots \times K_m \cap H^{\varphi},$$

то из $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\varphi}$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H.

Итак, если K – минимальная нормальная подгруппа группы G^{φ}, то либо $K = K^{\varphi}$ и $[K, H^{\varphi}] = 1$, либо $K \in \mathfrak{F}$ и $K \subseteq H^{\varphi}$. Если $K = K^{\mathfrak{F}}$, то, очевидно, $O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(K)$. Пусть $K \in \mathfrak{F}$. Тогда $K \subseteq H^{\varphi}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p-группами, либо pd-группами, то из $K \subseteq H^{\varphi}$ снова получаем, что $O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^{\varphi}) \subseteq C_{G^{\varphi}}(Soc(G^{\varphi})).$$

Так как $\Phi_{\theta}(G^{\varphi}, A) = 1$, то $Soc(G^{\varphi}) = \widetilde{F}_{\theta}(G^{\varphi}, A)$. По теореме 3.3

$$O_p(H^{\varphi}) \subseteq F(G^{\varphi}) = O_p(H^{\varphi}).$$

Значит, $O_p(H^{\varphi}) = 1$.

Так как $H^{\varphi} \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.3 из условия $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H^{\varphi} / O_p(H^{\varphi}) \in f(p)$. Так как $O_p(H^{\varphi}) = 1$, то $H^{\varphi} = H / \Phi_{\theta}(G, A) \in f(p)$. Теперь из $\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^{\varphi} \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 3.4.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы,* θ *– абнормально полный подгрупповой функтор и группа* G *имеет группу операторов* A*, такую, что* $(|G|, |A|) = 1$*. Если* N *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $N / N \cap \Phi_{\theta}(G, A) \in \mathfrak{F}$*, то* $N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\mathfrak{F}$-субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\mathfrak{F}$-достижимыми, то в качестве следствия из теоремы 3.4 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

Литература

1. *Frattini G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni // Atti Acad. Dei Lincei. 1885. Vol. 1. P. 281–285.

2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. *Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D.* On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group // Glasgow Math. J. 1994. Vol. 36. P. 241–247.

5. *Beidleman J. C., Smith H.* On Frattini-like subgroups // Glasgow Math. J. 1993. Vol. 35. P. 95–98.

6. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

8. *Borodich R. V.* A generalized Frattini subgroup // Asian-European Journal of Mathematics. 2021. Vol. 14, № 2. Art. 21500261. https://doi.org/10.1142/S1793557121500261

9. *Бородич Р. В.* О пересечении максимальных подгрупп конечных групп // Укр. мат. журн. 2019. Т. 71, № 11. С. 1455–1465.

10. *Авдашкова Л. П., Каморников С. Ф.* О нормализаторах $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 1. С. 33–35.

R. V. Borodich

On $\mathfrak{F}$-reachable subgroups in groups with operators

Summary

This paper studies the behavior of $\mathfrak{F}$-reachable subgroups in generalized Frattini extensions.